随机分析基础

邓燕飞

https://idengyf.github.io/

2023 年 5 月

内容提要

基本概念

空间：本质上是集合。

封闭：倘一个集合内的两个元素（注：在概率论中集合的元素是基本事件）经某种运算的结果仍在该集合内，则该集合关于这种运算是封闭的。

数环：若集合的元素是数，它对加、减、乘运算是封闭的，则称其为数环。

数域：若集合的元素是数，它对加、减、乘、除运算都是封闭的，则称其为数域。

集类：集合组成的集合。以空间（集合）Ω 的某些子集为元素的集合称为 Ω 上的集类。集类一般假定为非空（一个集类并不包括 Ω 的所有子集，只包括某一类特性的子集），常用花体 $\mathscr{F}$ 等来表示。

测度：以集合为自变量的函数，被称为集函数。研究集类的目的就是要寻找这个集函数的定义域。最适合作测度定义域的集类就是 σ 域。

Cont'd

σ **环/域**：根据集类对不同运算的封闭特性区分出的集类的一种，类似于数环和数域的区别。

σ **域** $=\sigma$ **代数**：空间 Ω 上的集类 $\mathscr{F}$ 满足以下条件（最少的一组），

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}, \Omega \in \mathscr{F}$，即 $\mathscr{F}$ 包含了空间 Ω 自身和空集；

(2) 若 $A \in \mathscr{F}$，则补集 $A^C \in \mathscr{F}$，即对取余封闭；

(3) $A_n \in \mathscr{F}, n = 1, 2, \ldots$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$，即对可数并封闭。

可测空间：由空间 Ω 及 Ω 上的 σ 域 $\mathscr{F}$ 组成的空间称为可测空间，表示为 $(\Omega, \mathscr{F})$。它可理解为具有 σ 域 $\mathscr{F}$ 的空间 Ω。任何属于 $\mathscr{F}$ 的集合 A（即 $A \in \mathscr{F}$）都称为一个 $\mathscr{F}$ 可测集。

σ 域是集合的集合，σ 域问题包括可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 实际上就是探讨一类特殊函数——集函数的定义域。一般函数的定义域是集合，而集函数的定义域是集合的集合，即 σ 域。

Cont'd

最小 σ 域：当 Ω 是一个可数集合时，其 σ 域是一个不太大的集类，可正常使用；当 Ω 是一个不可数集合时，仍可定义 σ 域，但其子集构成的 σ 域是一个太大的集类，不能正常使用，因此可考虑在 Ω 上构造一个最小的 σ 域以便正常使用。

$\sigma(\mathscr{A})$：$\mathscr{A}$ 为 Ω 的子集组成的集类，包含 $\mathscr{A}$ 的所有 σ 域的交及 $\mathscr{A}$ 本身的 σ 域是 $\mathscr{A}$ 的最小 σ 域，并称为由 $\mathscr{A}$ 生成的 σ 域。

Borel 域：生成 σ 域的一个例子。实数空间 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ 的所有开集生成的 σ 域称为 Borel 域，记为 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$。其中的集合 $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ 是一维 Borel 集。类似地，可定义 n 维 Borel 域 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ 及 n 维 Borel 集。Borel 域是实数轴上的一个 σ 域。

Borel 可测空间：可测空间 $\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})$ 称为 Borel 可测空间。

广义 Borel 可测空间：可测空间 $\bar{\mathbb{R}}, \mathscr{B}(\bar{\mathbb{R}})$ 称为广义 Borel 可测空间；$\mathscr{A} \in \mathscr{B}(\bar{\mathbb{R}}$ 称为广义 Borel 集。

集函数：设 $\mathscr{M}$ 为 Ω 上的一个集类，定义在 $\mathscr{M}$ 上的广义实值函数（即可取值 $\pm\infty$）μ 称为（定义在 $\mathscr{M}$ 上的）集函数。若取值于 $\bar{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$，则是非负集函数。

实数空间：$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ 表示的是空间内的元素为有限实数，位于 $-\infty$ 和 $+\infty$ 之间，但不包括 $-\infty$ 和 $+\infty$。

广义实数空间：$\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$，或 $\bar{\mathbb{R}} \triangleq \mathbb{R} \cup \{(-\infty)\} \cup \{(+\infty)\}$。

测度：μ 表示定义在 $\mathscr{M}$ 上的非负集函数，它满足，

(1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(2) 非负性，即对任意的 $A \in \mathscr{F}$, $\mu(A) \geq 0$;

(3) σ 可加性（或可数可加性），即对任意两两不相交的集合序列 $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$，均有 $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$。

则称非负集函数 μ 为 $\mathscr{M}$ 上的一个测度。由于此测度取非负值，因此也叫正测度。

需要注意的，不只是 σ 域上可定义测度，在小集类上也可定义测度，如在域（或称代数）、半域，环、半环等集类上亦可定义测度。但在 σ 域上定义的测度使用最方便。

Cont'd

有限测度和**有限测度空间**：若 $\mu(\Omega) < \infty$，则称 μ 为有限测度，称 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 为有限测度空间；若集合序列 $\{A_n,\ n \geq 1\}$ 满足 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$ 并使 $\mu(A_n) < \infty$ 对一切 $n \geq 1$ 都成立，则称 μ 为 σ 有限测度，称 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 为 σ 有限测度空间。

测度空间：若 μ 为可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的测度，则 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 为测度空间。测度空间是一个集函数空间，它的基础是空间（或集合）Ω，在 Ω 上构造了测度的定义域 $\mathscr{F}$，最后建立了一个特殊的集函数——测度。

测度（概率测度）一般要有非负性、正规性、σ 可加性，这需要把测度定义在 σ 域上，但有时 σ 域之外的其他集类更易测度，若能将其他集类上定义的测度扩张到 σ 域上就解决了这个矛盾。

测度扩张理论：设 $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}$ 是 Ω 上的一个集类，$\mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}_2$，$\mu_1, \mu_2$ 分别是 $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2$ 上的测度，若对每一个 $A \in \mathscr{M}_1$ 都有 $\mu_1(A) = \mu_2(A)$，则 μ_2 称为 μ_1 由 $\mathscr{M}_1$ 到 $\mathscr{M}_2$ 的扩张，或 μ_2 为 μ_1 由 $\mathscr{M}_1$ 扩张到 $\mathscr{M}_2$ 的扩张测度，μ_1 为 μ_2 在 $\mathscr{M}_1$ 上的限制。

测度扩张就是要把一个集类上的测度扩张到比它更大的集类上，即扩大集函数或测度的定义域。

Cont'd

半环：令 $\mathscr{F}$ 是 Ω 的所有子集构成的集类，$\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{F}$ 的非空子集，若称其为半环，则应满足，

1. $\emptyset \in \mathscr{C}$；

2. 如果 $A, B \in \mathscr{C}$，则 $A \cap B \in \mathscr{C}$；

3. 如果 $A, B \in \mathscr{C}$，$A \supset B$，则 A 与 B 之差 $A \setminus B$ 可表示为 $\mathscr{C}$ 中有限个互不相交集合之并。

Cont'd

参考文献

崔殿超，2008，《高级经济学数学基础》，黑龙江大学出版社。