一个简单的带抵押约束的 RBC 模型

邓燕飞 *

2021 年 4 月 21 日

内容提要：参考若干资料准备的金融加速器模型的入门知识，完善中。。。

关键词：理论模型

一 模型构造

1.1 家庭部门

家庭部门是标准设定。效用最大化

$$\max_{C_t,N_t,S_{t+1}} \mathbb{E}_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^t (\ln C_t + \theta \frac{N_t^{1+\gamma}}{1+\gamma}), \tag{1.1}$$

$$\text{s.t. } C_t + S_{t+1} \leq w_t N_t + (1+r_{t-1}) S_t + \Pi_t. \tag{1.2}$$

其中：C_t 是消费，N_t 是劳动，S_t 是储蓄或负债，r_{t-1} 是相应的真实利率，Π_t 是企业分红。

对三个选择变量求导，三个一阶条件合并为两个最优条件（消费欧拉方程和劳动供给曲线）：

$$\begin{cases} 1+r_t = \frac{\beta \mathbb{E}_t C_{t+1}}{C_t}, \\ w_t = C_t \theta N_t^{\gamma}. \end{cases}$$

1.2 企业部门

企业部门：物质资本所有者并做有关资本积累的决策。企业从金融机构借钱支持劳动工资（需要运营资本），借款数量取决于资本存量的规模。

企业追加投资的资金来自于利润。简单起见，假设企业不发行跨期债务。

假设企业生产前要在当期借款付工资，当期生产后产生利润立即偿还。由于是当期借款（类似于朋友之间借钱），因此借钱无需利息。

利润最大化（$\phi = 0$ 时没有资本调节成本）

$$\max_{N_t,I_t,K_{t+1}} \Pi_t = Y_t - w_t N_t - I_t,$$

$$\text{s.t. } Y_t = A_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha},$$

$$K_{t+1} = I_t - \frac{\phi}{2}\left(\frac{I_t}{K_t} - \delta\right)^2 K_t + (1-\delta) K_t,$$

$$w_t N_t \leq B_t q_t K_t.$$

其中，$w_t N_t$ 是总的应付工资，q_t 资本的价格（托宾 Q），K_t 是企业拥有的资本，A_t 是外生的技术冲击随机变量，B_t 是一个外生的随机借款限制（金融冲击）。如果企业违约，则出借者仅可以拿回 $B_t < 1$ 比例的资产。

*男，1983-，讲师（浙江大学经济学院），电子邮箱：dengyf@zufe.edu.cn。

三个一阶条件分别是

$$\begin{cases} w_t(1+\mu_t) = (1-\alpha)A_t\left(\frac{K_t}{N_t}\right)^{\alpha}, \\ 1 = q_t\left[1-\phi\left(\frac{I_t}{K_t}-\delta\right)\right], \\ q_t = \frac{1}{1+r_t}\left\{\alpha A_{t+1}\left(\frac{K_{t+1}}{N_{t+1}}\right)^{\alpha-1} + q_{t+1}\left[(1-\delta)+\mu_{t+1}B_{t+1}-\frac{\phi}{2}\left(\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}}-\delta\right)^2+\phi\left(\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}}-\delta\right)\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}}\right]\right\}. \end{cases}$$

其中，$\beta\mathbb{E}_t\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}$ 随机贴现因子，q_t 可视为在资本积累约束上的拉格朗日乘子，而 μ_t 可理解为借贷约束上的拉格朗日乘子。

μ_t 越来越大的意思是借贷约束越来越紧，而 $\mu_t = 0$ 时，不存在信贷约束。

假设企业不需要跨期借钱，因此家庭部门也不必有储蓄存量。均衡系统因此为

$$\begin{cases} AS\begin{cases} Y_t = A_tK_t^{\alpha}N_t^{1-\alpha} & \text{生产函数,} \\ w_t = C_t\theta N_t^{\gamma}, & \text{劳动供给方程} \\ w_t(1+\mu_t) = (1-\alpha)A_t\left(\frac{K_t}{N_t}\right)^{\alpha}, & \text{劳动需求方程} \end{cases} \\ AD\begin{cases} Y_t = C_t + I_t, & \text{市场出清条件} \\ 1+r_t = \frac{\beta\mathbb{E}_tC_{t+1}}{C_t}, & \text{消费需求欧拉方程,} \\ 1 = q_t\left[1-\phi\left(\frac{I_t}{K_t}-\delta\right)\right], & \text{投资需求方程,} \\ q_t = \frac{1}{1+r_t}\left\{\alpha A_{t+1}\left(\frac{K_{t+1}}{N_{t+1}}\right)^{\alpha-1} + q_{t+1}\left[(1-\delta)+\mu_{t+1}B_{t+1}-\frac{\phi}{2}\left(\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}}-\delta\right)^2+\phi\left(\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}}-\delta\right)\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}}\right]\right\}, & \text{资本供给欧拉方程} \end{cases} \\ EV\begin{cases} K_{t+1} = I_t - \frac{\phi}{2}\left(\frac{I_t}{K_t}-\delta\right)^2K_t + (1-\delta)K_t, & \text{资本积累方程} \\ w_tN_t \le B_tq_tK_t, & \text{借贷约束条件} \\ \ln A_t = \rho_A\ln A_{t-1} + \epsilon_A, & \text{外生技术变量的运动方程} \\ \ln B_t = (1-\rho)\ln B + \rho\ln B_{t-1} + \epsilon_B & \text{外生借贷限制的运动方程.} \end{cases} \end{cases}$$

有 9 个方程 9 个内生变量（另有两个关于外生变量 A_t 和 B_t 的运动方程）：消费 C_t，就业 N_t，资本 K_t，投资 I_t，产出 Y_t，资本的价格 q_t，储蓄的价格 r_t，工资 w_t，以及 μ_t。

如果 $\mu_t = 0$，意味着信贷约束 non-binding，回到了常见的 RBC 模型。

1.3 稳态分析

稳态时将系统中的各变量表示时间的下标 t 去除。

结合投资需求函数和资本积累方程：

$$\begin{cases} 1 = q\left[1-\phi\left(\frac{I}{K}-\delta\right)\right], \\ 0 = \phi\left(\frac{I}{K}-\delta\right)^2 - 2\left(\frac{I}{K}-\delta\right). \end{cases}$$

显然 q=1。根据消费需求方程，可知 $1+r=\beta$。从资本供给的欧拉方程可得

$$\frac{K}{N} = \left(\frac{\alpha}{\frac{1}{\beta}-(1-\delta)-\mu B}\right).$$

上述资本劳动比与借贷约束是否 binding 无关。只是 $\mu > 0$ 时的资本劳动比较 $\mu = 0$ 时更大。由于 μ 是针对运营工资的，因此，μ 越大，约束越紧，趋于降低就业 N。给定稳态的资本不变，因此稳态时的资本劳动比变大。

抵押约束等式成立时（$\mu_t > 0 \to$binding），根据借贷约束条件可知

$$w = B\frac{K}{N}.$$

结合稳态时劳动需求方程，可得

$$B(1+\mu) = (1-\alpha)\left(\frac{K}{N}\right)^{\alpha-1}.$$

再根据前面得到的资本劳动比的表达式，可以解出

$$\mu = \frac{1-\alpha}{B}\left[\frac{1}{\beta} - (1-\delta)\right] - \alpha.$$

由此可见，B 越大，μ 越小。表示借贷上的杠杆（借钱之于抵押品的比例）越大，抵押约束越松。

当 $\mu > 0$ 时，$B < \frac{1-\alpha}{\alpha}\left[\frac{1}{\beta} - (1-\delta)\right]$，换言之，这个比重小于该阀值时，借贷约束 bind。

最后，稳态下劳动供需相等且结合资源约束条件时，可解出

$$N = \left[\frac{1}{\theta}(1+\mu)^{-1}\frac{(1-\alpha)(K/N)^{\alpha}}{(K/N)^{\alpha} - \delta(K/N)}\right]^{\frac{1}{1+\gamma}}.$$

根据之前的分析知道参数 B 会影响 μ 和资本劳动比 $\frac{K}{N}$，也因此将通过这两个渠道影响 N。即 B 越大，μ 越小，因此 $\frac{1}{1+\mu}$ 越大，导致 N 越大；同时 B 越大，$\frac{K}{N}$ 越大，N 也会越大。一旦解出 N，K 等其他稳态下的内生变量皆可解出。

1.4 动态分析

参数值校准，比较 $\mu_t = 0$（non-binding）及 $\mu_t > 0$ (binding) 两种不同背景下宏观经济变量对两种不同的冲击（技术冲击及金融冲击）的动态影响。

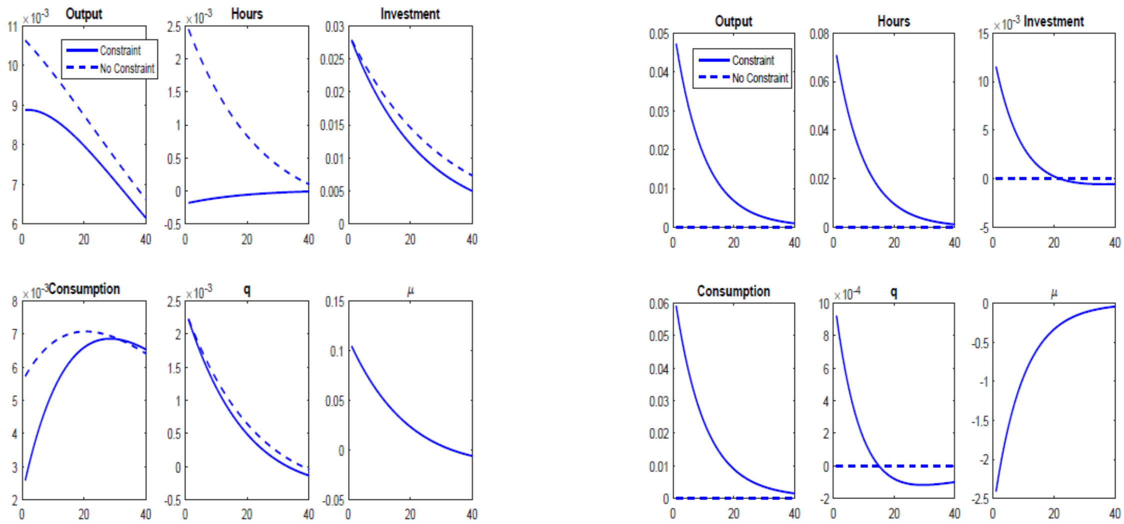

图 1: 左侧是技术冲击，右侧是金融冲击