

$$z_{ijt}(L_i) = \sum_{m=1}^N s_{ijt}^m z_{ijt}^m(L_i)$$

$$= \sum_{m=1}^N (\bar{s}_t + \Delta s_{ijt}) (\bar{z}_{ijt}(L_i) + \Delta z_{ijt}^m(L_i))$$

$$= N \cdot \bar{s}_t \cdot \bar{z}_{ijt}(L_i) + \sum_{m=1}^N \Delta s_{ijt}^m \Delta z_{ijt}^m(L_i)$$

$$= N \cdot \frac{1}{N} \cdot \bar{z}_{ijt}(L_i) + \sum_{m=1}^N \Delta s_{ijt}^m \Delta z_{ijt}^m(L_i)$$

$$= \bar{z}_{ijt}(L_i) + \sum_{m=1}^N \Delta s_{ijt}^m \Delta z_{ijt}^m(L_i)$$

$$\therefore \Delta s_{ijt}^m = (s_{ijt}^m - \bar{s}_t) \quad \Delta z_{ijt}^m(L_i) = z_{ijt}^m(L_i) - \bar{z}_{ijt}(L_i)$$

$$= \bar{z}_{ijt}(L_i) + \sum \text{COV}(s_{ijt}^m, z_{ijt}^m)$$

$$\begin{aligned}
\zeta_{ijt-1} &= s_{ijt-1}(Li) \zeta_{ijt-1}(Li) + s_{ijt-1}(Ex) \zeta_{ijt-1}(Ex) \\
&= [1 - s_{ijt-1}(Ex)] \zeta_{ijt-1}(Li) + s_{ijt-1}(Ex) \zeta_{ijt-1}(Ex) \\
&= \zeta_{ijt-1}(Li) + s_{ijt-1}(Ex) (\zeta_{ijt-1}(Ex) - \zeta_{ijt-1}(Li))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_{ijt} &= s_{ijt}(Li) \zeta_{ijt}(Li) + s_{ijt}(En) \zeta_{ijt}(En) \\
&= \zeta_{ijt}(Li) + s_{ijt}(En) (\zeta_{ijt}(En) - \zeta_{ijt}(Li))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \zeta_{ijt} &= \zeta_{ijt} - \zeta_{ijt-1} \\
&= \Delta \zeta_{ijt}(Li) + s_{ijt}(En) (\zeta_{ijt}(En) - \zeta_{ijt}(Li)) \\
&\quad + s_{ijt-1}(Ex) (\zeta_{ijt-1}(Ex) - \zeta_{ijt-1}(Li)) \\
&= \Delta \bar{\zeta}_{ijt}(Li) + \\
&\quad \Delta Cov_{ijt}(Li) + \\
&\quad s_{ijt}(En) (\zeta_{ijt}(En) - \zeta_{ijt}(Li)) + \\
&\quad s_{ijt-1}(Ex) (\zeta_{ijt-1}(Ex) - \zeta_{ijt-1}(Li))
\end{aligned}$$