教学创新成果报告

——以《数理经济学》为例

报告人：邓燕飞 浙江财经大学经济学院

【摘要】

本人讲授《数理经济学》始于2019年在复旦大学作为师资博士后工作期间，2021年进入浙江财经大学工作有幸继续参与本课程的授课。五年来笔者回归板书这一古老的教学方式，但基于现代科技在GitHub建立了个人教学主页，在个人学术微博记录课堂内外对相关知识的点滴思索，并即将完稿本门课程高度相关的两部专著。教学目标、教学内容、教学方法、思政融入等方面的创新通过教室黑板、个人主页、个人微博、个人专著等平台时有呈现。经过近几年的摸索和改进，得到本院学生喜爱、本校学生青睐，本市有学生每周奔波百里前来旁听，也吸引了全国乃至全球的学生学者对本课程的关注。

【正文】

一、课堂实践

本课程一直虽是选修课，但近三年来，学生选课的热情高涨，班级容量一扩再扩，每次都达到了作为选修课极限的48人；本学期区分了普通班和拔尖班后，总选修人数是突破了原来的选课容量，达到67人。

学生们愿意选修，乐意选修，争相选修，无形中也给笔者以很大压力。笔者看中学生的口碑，在意学生在本人的课堂上是否有切实的收获。因此，基于数年来课堂的教学实践，笔者有过或深或浅的思考，也有意无意间在课堂内外实施了一些创新的举措。

二、教学反思

问题 1. 知识点枯燥，难学。

像国际贸易等应用经济学的一些分支学科,其中的案例本身可能就足够生动有趣，但数理经济学的故事性和叙事性相对偏弱，充斥着大量的数学符号、推演计算、定理法则，涉及到的知识点相对抽象，比如局部均衡与一般均衡通过数学方程体现的关键差异,比如系数和乘数这组常见概念的核心区别及对于经济学的意义，比如为什么有简型方程和结构方程之不同，再比如静态最优化中的包络定理到动态最优化中为何又有延伸,还比如市场价格和影子价格是否有重合的可能，等等，知识点多较抽象，学习时难免吃力。

问题 2. 知识线交叉，难用。

有学生曾疑惑不解地向我询问,数理经济学有什么用? 具体能用来做什么? 因为感觉不像比如会计学，学了可以到公司从事会计工作；国际贸易学，学了有助从事国际贸易工作；货币银行学，学了可以往银行工作方向发展。而数理经济学似乎就是在学数学，但学生们在选修数理经济学之前，一般已经修读过高等数学、线性代数等课程，既如此，为什么还要学换汤不换药的数理经济学? 且学过来也不知道怎么去应用。

问题 3. 知识面庞杂，难教。

用著名华人学者蒋中一的话说,数理经济学不像公共财政和国际贸易是经济学的分支学科，它是经济学家利用数学符号描述经济问题、运用已知的数学定理进行推理演绎的一种方式。现在经济学已广泛使用数学语言，因此甚至可以将任何一本经济学教程称之为数理经济学，只是有的书上可能多用几何，而有的书上会多用微积分、差分方程等。总而言之，作为一个工具和技术性语言，相较于中

英等文字语言，或相比于计算机语言，数理经济学涵盖的知识面似乎更为庞杂，教授时难以下手。

三、创新举措

针对以上教学实践中学生们反映提出的或自身感受体察出的几大问题，笔者在以下方面进行了锐意创新：

1. 教学目标创新

从毕业后的去向来说，学生们要么走入社会参加工作，要么考研读博继续深造。教学目标上的创新是尽可能二者兼顾，并经常明白无误地传递给学生。

(1.1) 数理经济学的教学目标之一是使学生聪慧，教学生分析问题解决问题的思路，这有助其毕业后更好地做好本职工作。

以静态最优问题为例。当掌握了无约束最优问题的相关条件时，我们如何得到等式约束最优问题的条件？思考的方向是，将等式约束变成无约束，得到退化为无约束的与等式约束等价的相关条件，于是，再遇到更复杂的等式约束或不易将其转化成无约束问题时，也能方便地直接处理等式约束最优问题。

进一步，掌握了等式约束最优问题的相关条件时，又如何得到不等式约束最优问题的条件呢？思考的方向是，将不等式约束变成等式约束，得到退化为等式约束的与不等式约束等价的相关条件，于是，再遇到更复杂的不等式约束或不易将其转化成等式约束问题时，也能方便地直接处理不等式约束的最优化问题。

这是将复杂问题转化为简单问题的思维方式的培养，对于学生毕业后参加工作而言也将受益匪浅。

此外，像动态规划思想也有助学生毕业后工作时更有条不紊，运用所学可以做出最好的时间安排。

(1.2) 数理经济学的另一教学目标是帮助学生读懂国内外顶尖期刊上的理论文章，从而助力其毕业后考研读博继续深造。本学期班上有几位同学课内外学习特别认真，每次都抢坐于前排，对提出的问题会认真思考，并积极回答，其共同特征就是准备申请国外名牌大学的研究生。

此外，有位大二的学生，尚未到大三来选修本课程，但了解到世界一流大学对理论模型看重，因此通过其导师多次于课后向我咨询数理经济学的相关问题，我推荐的经典学术论文也会认真去读，并会对论文中的理论模型细致推导，不会的守着笔者课后向其解释并希望板书推导演示一遍。看得出，该位学生希望理清数理逻辑其对应的经济学含义，想清清楚楚地学会，扎扎实实地学好。

410 QUARTERLY JOURNAL OF ECONOMICS

The model assumes that a constant fraction of output, s, is invested. Defining k as the stock of capital per effective unit of labor, $k = K/AL$, and y as the level of output per effective unit of labor, $y = Y/AL$, the evolution of k is governed by

$$\dot{k}(t) = sy(t) - (n+g+\delta)k(t) = sk(t)^{\alpha} - (n+g+\delta)k(t), \tag{4}$$

where δ is the rate of depreciation. Equation (4) implies that k converges to a steady-state value k^* defined by $sk^{*\alpha} = (n+g+\delta)k^*$, or

$$k^* = [s/(n+g+\delta)]^{1/(1-\alpha)}. \tag{5}$$

The steady-state capital-labor ratio is related positively to the rate of saving and negatively to the rate of population growth.

The central predictions of the Solow model concern the impact of saving and population growth on real income. Substituting (5) into the production function and taking logs, we find that steady-state income per capita is

$$\ln\left[\frac{Y(t)}{L(t)}\right] = \ln A(0) + gt + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(s) - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(n+g+\delta). \tag{6}$$

414 AMERICAN ECONOMIC ASSOCIATION

regards the "true" population response coefficient a as nonrandom, he may have to base his actions on an estimate of it obtained by fitting equation (1) to sample data. The estimate he uses will be a random variable, and its variance will affect the "variance" of y around its forecast value.[3]

As in the case where the population response coefficient is random, the magnitude of the policy action affects the contribution of this type of uncertainty to the variance of y. In this case, however, the contribution depends on the difference between the policy taken in the forecast period and the average level of policy pursued in the sample period used in estimating a. Assuming the u's are independent over time, a will be uncorrelated with the u for the forecast period and equation (3) may be rewritten:

$$\sigma_y^2 = \sigma_a^2(P - \bar{P})^2 + \sigma_u^2 \tag{3'}$$

where $\bar{P}$ is the average P for the sample period on which the estimate of a is based. Although we will use the first formulation to illustrate the significance of uncertainty in the response of y to policy actions, our results can be translated easily for use in the forecast error case.

Assuming the response coefficient is a random variable, we may find the expected utility associated with a given policy action by substituting (1) in (2):

$$E(U) = -[(\bar{y} - y^*)^2 + \sigma_y^2] = -[(\bar{a}P + \bar{u} - y^*)^2 + \sigma_a^2P^2 + \sigma_u^2 + 2\rho\sigma_a\sigma_uP] \tag{4}$$

where $\bar{y}$ and $\bar{u}$ are the expected values of y and u, respectively. There is no reason to suppose that $\bar{u}$ equals zero.

By differentiating (4) with respect to P and setting the derivative equal to zero, the optimal value of P is easily found to be:

$$P^* = \frac{\bar{a}(y^* - \bar{u}) - \rho\sigma_a\sigma_u}{\bar{a}^2 + \sigma_a^2} \tag{5}$$

图 1：笔者推荐学生看的 Top5 期刊的学术论文，指出其中的数理模型与本课程的联系。

值得一提的是，在此教学目标的吸引下，浙江大学经济学院院长张俊森教授的博士生李琼琼本学期每周都来旁听本门课程，有几次还带领其浙大同学杨凡和陈思凯两位博士生前来旁听。几位同学一致表示，“在浙大都听不到这样脉络清晰、细致入微、讲解透彻的课程。”他们每周耗费数小时于路上专程前来，会是一个比较好的说明。这也让笔者想起自己读博期间的某个学期每周长途跋涉去上海交大旁听许志伟和董丰两位老师开设的高级宏观经济学课程。

(1.3) **从课程本身来说，教学目标就是要让学生们了解什么是数理模型、如何构建、怎么看懂、初步知道怎么应用**。为了更好地向学生阐述和解释，笔者简单勾勒了下图并置于个人教学主页。该图想表达的是，理论模型无非就是要研究外生变量如何影响内生变量。所谓的内生变量，就是模型决定的，而外生变量，就是模型外给定的。内生变量和外生变量不是一成不变的，根据研究用意的变化，模型会发生改变，内外生变量也相续会有所调整。知道为何要构建模型及构建模型的用意后，回过头来介绍什么是数理模型及如何构造等问题，会相对轻松。

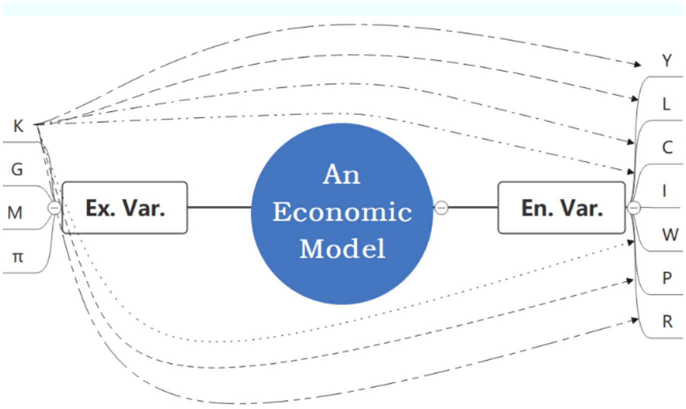


图 2：数理模型的基本构成及本质功能

2. 授课视野创新

笔者以为，要实现以上教学目标，首先要有授课视野上的创新。虽然也有专家学者反复强调教研是一体的，但实践中两者割裂的现象仍然极为严重，这很大程度上与授课视野的狭窄有关。通常会误以为，找了一本好教材，就能上好一门课，这是很值得商榷和探讨的。**既然科研的第一步是检索文献和熟读文献，为何教学的第一步无须对“文献”进行了解**？问题是，对于上好一门课而言，哪些资料是教学的参考文献呢？笔者以为，至少可从两个方向来进行教学上的文献检索：

(2.1) **全国乃至全球名校的本门课程怎么上**。

得益于互联网及一些学者的分享，容易了解到其他高校的教师如何安排本门课程的教学目标、教学内容、教学的侧重点及对难点不同角度的处理。下面仅列

举部分有超链接并能在其个人主页上找到相关课程教学资料的学者：

Nathan Balke	Jordi Gali	Gregory Mankiw	Thomas Sargent
Laurence Ball	Mark Gertler	Bennett McCallum	Stephanie Schmitt-Grobe
Ronald Benabou	Kevin Grier	Allen Meltzer	Frank Schorfheide
Olivier Blanchard	Robin Grier	Casey Mulligan	Christopher Sims
Craig Burnside	Joseph Haslag	Christopher Otrok	Lars Svensson
V.V. Chari	Peter Ireland	Edward Prescott	Ellis Tallman
Lawrence Christiano	Aubhik Kahn	Sergio Rebelo	Julia Thomas
Dean Corbae	Patrick Kehoe	Ricardo Reis	Mark Watson
William Dupor	Robert King	Richard Rogerson	Noah Williams
Martin Eichenbaum	Finn Kydland	Julio Rotemberg	Michael Woodford
Walter Enders	Eric Leeper	Juan Rubio-Ramirez	Randall Wright
Jesus Fernandez-Villaverde	Robert Lucas, Jr		

图 3：部分学者的超链接

除了以上学者分享的教学资料外，笔者另外搜集了不下百本书籍：

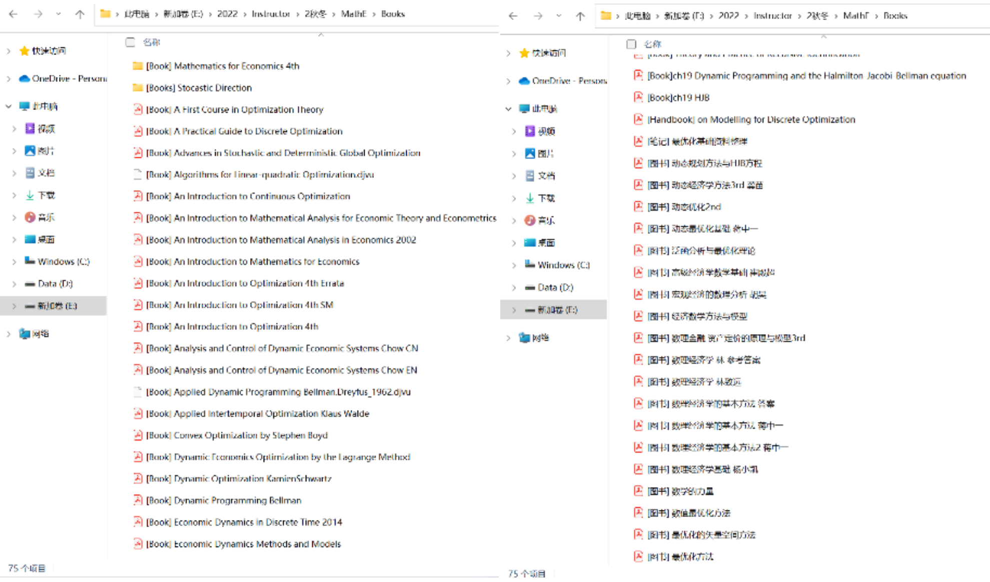


图 4：《数理经济学》参考书目，截取自笔者电脑。

以上仅是笔者更换电脑后重新检索的 75 本，有些是中英不同版本，剔除后不下 50 本。在笔者此前用过的电脑上还有更多，上百本不在话下。我有时半开玩笑半认真地向同学们介绍说，其他任何一位上过本门课程的教师所知道的参考书我都有所耳闻，他们没见过的，我应该有所了解。这得益于经济学论坛“经管之家”上学友们早年的分享，以及全球各地学者的慷慨分享。当然，更重要的是，要有在教学上先检索教学相关文献和充分了解教学相关资料的理念，否则，纵使到处是宝，也不会去捡。顺值一提，这些资料有的是论坛上下载仅供教学参考之用的，有的是购买的电子版，纸质版也有一些。**有的誊抄**，有的精读，有的粗翻。

(2.2) 本课程与其他课程的内在联系与区别。

本课程上有一些相对简单的案例，比如所用蒋中一教材的第四版第 402 页，介绍了一个垄断竞争市场环境下生产两件差异化产品的某厂商利润最大化的问题，单独就这个例题而言，写出收益减成本的利润函数后，对需求量求导即可，代入反需求函数，即可求最优定价。但在宏观经济学的常见例题中，一般直接让产品价格作为选择变量，这也是垄断竞争区别于完全竞争的关键所在。通过该例题目，串联起不同课程中的处理方式，可以有新的收获，即，完全竞争时，厂商选择销量 Q 最大化利润，而垄断竞争时，厂商既可以选择价格、也可以选择需求量 Q 最大化利润。很多书上没有指出 Q 和 Q 的区别，其实前者是供给量Q_s而后者是需求量Q_d。

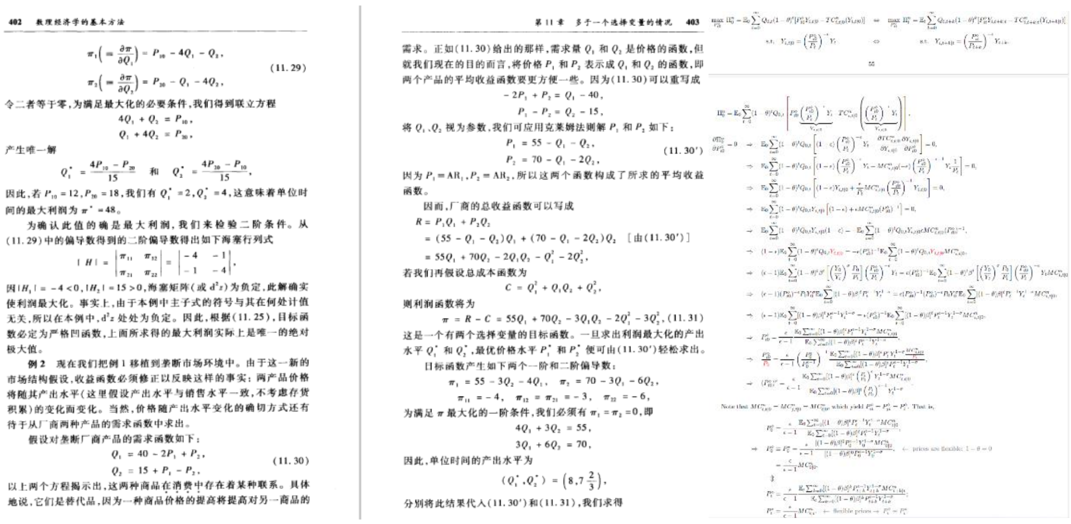


图 5：垄断竞争时的最优化，左图截自蒋中一《数理经济学的基础方法》中文翻译版，右图截自笔者自编讲义。

再比如，微观经济学的课堂上基于劳动需求方程，可能会介绍实际工资或名义工资对劳动需求的影响，这里当然是在做比较静态分析，但更重要的是，数理经济学会进一步介绍到，这是特殊的比较静态分析，所比较的新旧静态不是任意的，而是首先通过最优化求得的结果，也叫目标均衡，这与通常情况下的非目标均衡有差异。其他课程上可能会对此淡化，但本课程会强调指出。

例 7[ch1] 得到了厂商部门一般函数形式的劳动力需求曲线：

$$F_L(K, L_d^{\circledast}) = \frac{W}{P}.$$

若未给出具体的生产函数，则这是具有一般函数形式的劳动力需求曲线，全微分移项后容易就实际工资和有形资本的变化对合意劳动力需求的影响作比较静态分析：

$$F_{Lk}\mathrm{d}K + F_{LL}\mathrm{d}L_d^{\circledast} = \mathrm{d}\frac{W}{P},$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{d}L_d^{\circledast} = \underbrace{\frac{1}{F_{LL}}}_{<0}\mathrm{d}\frac{W}{P} - \underbrace{\frac{F_{LK}}{F_{LL}}}_{>0}\mathrm{d}K.$$

还可换种方式全微分以讨论名义工资或名义价格对合意的劳动力需求的影响：

$$F_{Lk}\mathrm{d}K + F_{LL}\mathrm{d}L_d^{\circledast} = \frac{1}{P}\mathrm{d}W - \frac{W}{P^2}\mathrm{d}P,$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}L_d^{\circledast} = \underbrace{\frac{1}{PF_{LL}}}_{<0}\mathrm{d}W - \underbrace{\frac{W}{P^2F_{LL}}}_{>0}\mathrm{d}P - \underbrace{\frac{F_{LK}}{F_{LL}}}_{>0}\mathrm{d}K.$$

可见，外生的有形资本和名义价格都与合意的劳动需求同向变化，而外生的实际工资和名义工资都与合意的劳动需求反向变动。

图 6：目标均衡位移与比较静态分析，截取自笔者书稿。

课程间的知识有联系又有区别，理清其异同，有助**教得更明白，学得更通透**。

3．教学内容创新

(3.1) **内容安排上的创新**：建立方便记忆和理解的知识分类

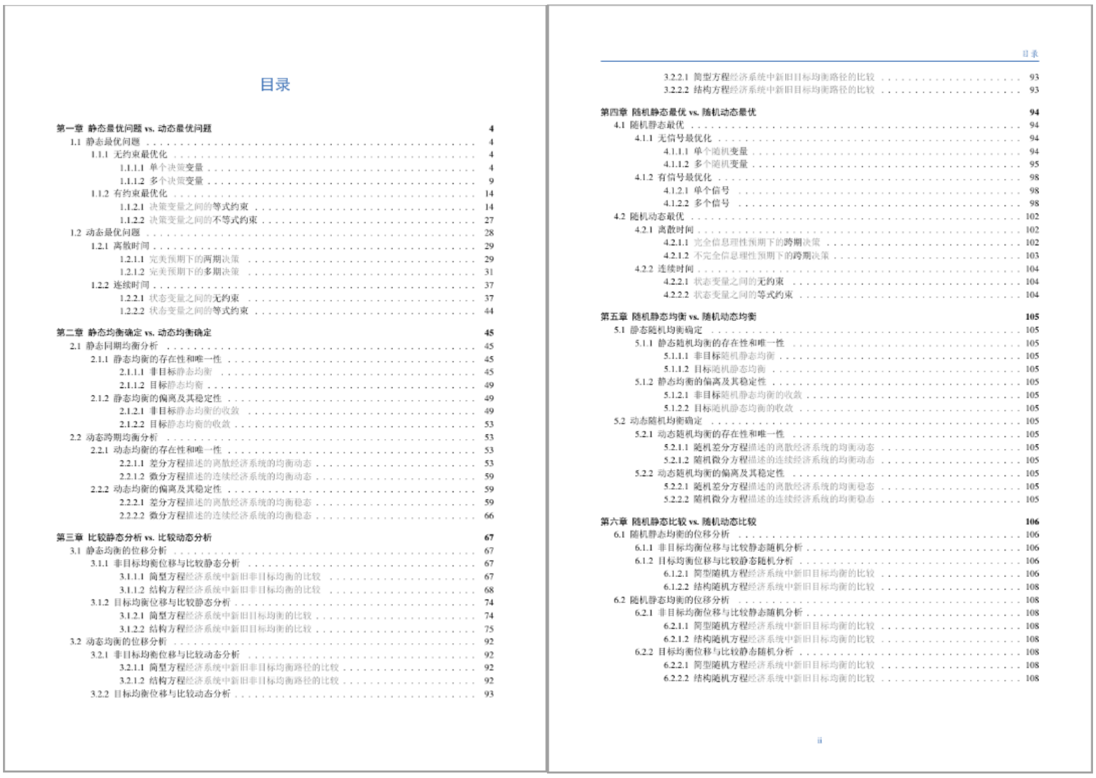
前面提到，数理经济学的知识面庞杂，很容易在学习过程中迷失其中。笔者也曾非常迷惑或找不到头绪。后来才意识到，数理经济学无非分为确定性和随机模型两大类，从确定到随机是一个不小的跨度，但这种划分可能更适合研究生。**本科生阶段而言，更适合按静态模型和动态模型这两大类别去教学**，这两类中每一类又无非是三大主题：最优化、均衡求解和比较分析。静态模型是静态最优化、静态均衡求解和比较静态分析，而动态模型就是动态最优化、动态均衡求解和比较动态分析。**按两类三主题向学生介绍，后面再怎么学，都不会迷失方向**。

下图是笔者勾勒的两类三主题的关系网，本科生和研究生都适用。笔者建议，本科生阶段暂不用考虑不确定性时的情形，但对于少数有深造打算的本科生而言，对知识体系的完整图谱和前沿走向有所了解也是好的。

	Static Models		Dynamic Models			
	with Certainty	with Uncertainty	with Certainty		with Uncertainty	
	Moment		Discrete Time	Continuous Time	Discrete Time	Continuous Time
	Full Knowledge	Filtering	Perfect Foresight		Expectations or Learning	
Optimization Problems						
Equilibrium Discussion						
Equilibrium Comparison						

图 7：知识体系和主体结构。截取自个人教学主页。

以下是笔者根据两类三主题编排教学专著的目录：



目录

第一章 静态最优问题 vs. 动态最优问题 4
1.1 静态最优问题 4
1.1.1 无约束最优化 4
1.1.1.1 单个决策变量 4
1.1.1.2 多个决策变量 9
1.1.2 有约束最优化 14
1.1.2.1 决策变量之间的等式约束 14
1.1.2.2 决策变量之间的不等式约束 27
1.2 动态最优问题 28
1.2.1 离散时间 29
1.2.1.1 完美预期下的两期决策 29
1.2.1.2 完美预期下的多期决策 31
1.2.2 连续时间 37
1.2.2.1 状态变量之间的无约束 37
1.2.2.2 状态变量之间的等式约束 44

第二章 静态均衡确定 vs. 动态均衡确定 45
2.1 静态同期均衡分析 45
2.1.1 静态均衡的存在性和唯一性 45
2.1.1.1 非目标静态均衡 45
2.1.1.2 目标静态均衡 49
2.1.2 静态均衡的偏离及其稳定性 49
2.1.2.1 非目标静态均衡的收敛 49
2.1.2.2 目标静态均衡的收敛 53
2.2 动态跨期均衡分析 53
2.2.1 动态均衡的存在性和唯一性 53
2.2.1.1 差分方程描述的离散经济系统的均衡动态 53
2.2.1.2 微分方程描述的连续经济系统的均衡动态 59
2.2.2 动态均衡的偏离及其稳定性 59
2.2.2.1 差分方程描述的离散经济系统的均衡稳态 59
2.2.2.2 微分方程描述的连续经济系统的均衡稳态 66

第三章 比较静态分析 vs. 比较动态分析 67
3.1 静态均衡的位移分析 67
3.1.1 非目标均衡位移与比较静态分析 67
3.1.1.1 简型方程经济系统中新旧非目标均衡的比较 67
3.1.1.2 结构方程经济系统中新旧非目标均衡的比较 68
3.1.2 目标均衡位移与比较静态分析 74
3.1.2.1 简型方程经济系统中新旧目标均衡的比较 74
3.1.2.2 结构方程经济系统中新旧目标均衡的比较 75
3.2 动态均衡的位移分析 92
3.2.1 非目标均衡位移与比较动态分析 92
3.2.1.1 简型方程经济系统中新旧非目标均衡路径的比较 92
3.2.1.2 结构方程经济系统中新旧非目标均衡路径的比较 92
3.2.2 目标均衡位移与比较动态分析 93

目录

3.2.2.1 简型方程经济系统中新旧目标均衡路径的比较 93
3.2.2.2 结构方程经济系统中新旧目标均衡路径的比较 93

第四章 随机静态最优 vs. 随机动态最优 94
4.1 随机静态最优 94
4.1.1 无信号最优化 94
4.1.1.1 单个随机变量 94
4.1.1.2 多个随机变量 95
4.1.2 有信号最优化 98
4.1.2.1 单个信号 98
4.1.2.2 多个信号 98
4.2 随机动态最优 102
4.2.1 离散时间 102
4.2.1.1 完全信息理性预期下的跨期决策 102
4.2.1.2 不完全信息理性预期下的跨期决策 103
4.2.2 连续时间 104
4.2.2.1 状态变量之间的无约束 104
4.2.2.2 状态变量之间的等式约束 104

第五章 随机静态均衡 vs. 随机动态均衡 105
5.1 静态随机均衡确定 105
5.1.1 静态随机均衡的存在性和唯一性 105
5.1.1.1 非目标随机静态均衡 105
5.1.1.2 目标随机静态均衡 105
5.1.2 静态均衡的偏离及其稳定性 105
5.1.2.1 非目标随机静态均衡的收敛 105
5.1.2.2 目标随机静态均衡的收敛 105
5.2 动态随机均衡确定 105
5.2.1 动态随机均衡的存在性和唯一性 105
5.2.1.1 随机差分方程描述的离散经济系统的均衡动态 105
5.2.1.2 随机微分方程描述的连续经济系统的均衡动态 105
5.2.2 动态随机均衡的偏离及其稳定性 105
5.2.2.1 随机差分方程描述的离散经济系统的均衡稳态 105
5.2.2.2 随机微分方程描述的连续经济系统的均衡稳态 105

第六章 随机静态比较 vs. 随机动态比较 106
6.1 随机静态均衡的位移分析 106
6.1.1 非目标均衡位移与比较静态随机分析 106
6.1.2 目标均衡位移与比较静态随机分析 106
6.1.2.1 简型随机方程经济系统中新旧目标均衡的比较 106
6.1.2.2 结构随机方程经济系统中新旧目标均衡的比较 108
6.2 随机静态均衡的位移分析 108
6.2.1 非目标均衡位移与比较静态随机分析 108
6.2.1.1 简型随机方程经济系统中新旧目标均衡的比较 108
6.2.1.2 结构随机方程经济系统中新旧目标均衡的比较 108
6.2.2 目标均衡位移与比较静态随机分析 108
6.2.2.1 简型随机方程经济系统中新旧目标均衡的比较 108
6.2.2.2 结构随机方程经济系统中新旧目标均衡的比较 108

ii

图 8：知识编排。截取自笔者书稿。

(3.2) **内容区分上的创新**：抓住关键差异

比如，静态模型中的静态乘数和动态模型中的动态乘数是一组非常重要的概念，它们是建模的落脚点之一，都跟系数有密切关系，有时恰是系数，但更多时候与系数有别，如何区分，对于本科生来说，是一个难点，也是整个学期的一个难点。**笔者综合多种资料，提出可从“简型方程”和“结构方程”的角度来理解乘数和系数的异同**。以静态模型为例，若是一个简型方程，则乘数即为因变量对自变量的导数或偏导。静态均衡的显示解（也称之为分析解、解析解或封闭解）是简型方程，但简型方程未见得是具体函数形式，也可以是一般函数形式。故此，蒋中一先生的书上根据具体函数形式与一般函数形式来划分讨论乘数稍显偏颇，且似未抓住问题的关键，因为本科生仍会困顿于何时系数就是乘数而何时并非。区分了简型方程和结构方程后，不管是具体函数形式还是一般函数形式，系数与

乘数的异同可一针见血，分别用相应方法可快速求出。

例 2[ch1] 通过最优化问题的一阶必要条件可得到厂商部门的劳动力需求曲线：

$$F_L(K, L_d^{\otimes}) = \frac{W}{P}.$$

需求方程左侧 W/P 是劳动力投入的实际边际成本，在古典模型中，价格和工资都为弹性，同频联动，因此视其为整体；需求方程右侧 $F_L(K, L_d^{\otimes})$ 是劳动力投入的边际产出，其为外生资本和为使利润最优化所选择的劳动力这两个投入要素的函数。[1]

该方程中给出了目标函取得极值时所选择的劳动力要素 $L_d^{\otimes}$，可称为合意的劳动力需求（为与任意的劳动力投入区分增加上标 $\otimes$）。由于并未给出具体的生产函数，劳动力需求曲线也只是具有一般函数形式，但 $L_d^{\otimes}$ 隐含地表示了会是有形资本 K 和实际工资 W/P 的函数，故而，

1) 给定有形资本，若要分析实际工资变动对合意劳动力需求的影响，则其为简型方程，影响乘数为原函数的导数或反函数的导数的倒数：

$$\frac{\mathrm{d}L_d^{\otimes}}{\mathrm{d}(W/P)} = \frac{1}{\mathrm{d}(W/P)/\mathrm{d}L_d^{\otimes}} = \frac{1}{F_{LL}}.$$

[1] 上述一阶条件可定义出实际边际成本 $MC^r \equiv (W/P)/F_L(K, L_d)$，名义边际成本自然为 $MC \equiv W/F_L(K, L_d)$，从而回到价格等于名义边际成本这一基本的关系式 $(P = MC)$。

74

3.1 静态均衡的位移分析

2) 给定实际工资，倘要分析有形资本对合意劳动力需求的影响，则其为实质上为 $F_L(K, L_d^{\otimes}) = 0$ 式的结构方程，影响乘数可用隐函数法则得到：

$$\frac{\mathrm{d}L_d^{\otimes}}{\mathrm{d}K} = -\frac{F_{LK}}{F_{LL}}.$$

或者全微分该方程：

$$F_{LK}\mathrm{d}K + F_{LL}\mathrm{d}L_d^{\otimes} = \mathrm{d}\frac{W}{P}.$$

求解内生变量：

$$\mathrm{d}L_d^{\otimes} = \frac{1}{F_{LL}}\mathrm{d}\frac{W}{P} - \frac{F_{LK}}{F_{LL}}\mathrm{d}K.$$

它是关于合意劳动力需求的微小变动这一新内生变量的解析解，是为简型方程，因为该方程只有单侧有内生变量，它纯粹地为有形资本的微小变动和实际工资的微小变动这两个新外生变量及参数 $1/F_{LL}$ 和 F_{LK}/F_{LL} 的函数。外生变量（包括参数）相互独立，因此可固定其他外生变量而看出某一外生变量对内生变量的纯粹影响。

首先假设有形资本固定不变时 (i.e., $\mathrm{d}K = 0$)，实际工资的变动对劳动力需求的影响参数为 $\frac{1}{F_{LL}} < 0$，即有形资本给定时，实际工资越高，劳动力需求越低。

其次假设实际工资固定不变 (i.e., $\mathrm{d}W/P = 0$) 时，有形资本的变动对劳动力需求的影响参数为 $-\frac{F_{LK}}{F_{LL}} > 0$，即实际工资给定时，有形资本越多，劳动力需求越高。

综上，合意的劳动力需求可用以下一般函数形式表达：

$$L_d^{\otimes} = L_d^{\otimes}(\underbrace{W/P}_{-}, \underbrace{K}_{+}).$$

图 9：简型方程和结构方程中求比较静态分析的技术。截自笔者书稿。

(3.3) **内容深化上的创新**：以旧带新

前面截取的笔者正撰写的专著目录显示，内容编排上，不同于常见图书将静态模型和动态模型分列的做法，笔者将静态最优化和动态最优化放在一起，将静态均衡求解和动态均衡求解放在一块，将比较静态分析和比较动态分析也一并放置，如此便于以旧带新。举例来说，当学生掌握了静态最优化之后，动态最优

与静态最优的差异、产生差异的原因、怎么处理这些差异及静态模型中的最优化方法到动态模型中是否直接借用还是有所变化或升级，则一气呵成。如果不这样处理，在内容有所更换、节奏有所打乱后再来学动态最优，掌握起来异常困难。

1.2 动态最优问题

1.2.1 离散时间

1.2.1.1 完美预期下的两期决策

在双变量等式约束的静态最优化问题中，用 x 和 y 来表示这两个选择变量，为与两期离散时间更好地比较，不妨在静态最优化问题中，将 x 和 y 改成 x_1 和 x_2 分别表示静态时的两个选择变量。动态时，沿用 x_1 和 x_2 表示两个选择变量，但下标多了“时间”这层意思，表示的是在时间 $t=1$ 时及 $t=2$ 时的选择变量。

$$\left.\begin{aligned}&\overset{\max}{\underset{\min}{\longleftrightarrow}}\ v=f(x_1,x_2),\\&\text{s.t.}\quad g(x_1,x_2)=z.\end{aligned}\right\}\text{同期离散静态}\quad\overset{\text{vs.}}{\Longleftrightarrow}\quad\text{两期离散动态}\left\{\begin{aligned}&\overset{\max}{\underset{\min}{\longleftrightarrow}}\ v=f(x_1,x_2),\\&\text{s.t.}\quad g(x_1,x_2)=z.\end{aligned}\right.$$

比较后不难发现，尽管符号下标的含义不同，但离散时间的两期动态最优化问题与双变量等式约束的静态最优化问题在形式上完全一致。因此，此前介绍的消元法、全微分法和 Lagrange 乘数法依然奏效。

图 10：从同期双变量静态到两期离散动态。截取自笔者书稿。

变分法中被消掉的控制变量（i.e., 静态问题中的选择变量，动态问题中一类选择变量）成为主角。目标函数中仍是控制变量，约束条件是包含控制变量的状态微分方程，像静态最优化或离散动态最优问题一样，构造 Lagrange 函数，推导出 Hamilton 函数视角下的一阶必要条件等（最大值原理）。控制变量可连续、可间断；状态变量连续即可（允许尖折点）。

回到原问题：

$$\left.\begin{aligned}&\max_{C(t),S(t)}\ U_0=\int_0^T e^{-\rho t}U[C(t)]\mathrm{d}t,\\&\text{s.t.}\quad C(t)+\dot S(t)=rS(t)+Y(t),\\&\qquad\text{给定 } S(0)=0=S(T).\end{aligned}\right\}\xRightarrow{\text{先不考虑主观贴现}}\left\{\begin{aligned}&\max_{C(t),S(t)}\ U_0=\int_0^T \cancel{e^{-\rho t}}U[C(t)]\mathrm{d}t,\\&\text{s.t.}\quad C(t)+\dot S(t)=rS(t)+Y(t),\\&\qquad\text{给定 } S(0)=0=S(T).\end{aligned}\right.$$

像离散时间中一样构造 Lagrange 函数，区别仅在于此前是求和算子，而现在变成了积分算子：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t)&\equiv\int_0^T\left\{U[C(t)]+\lambda(t)\left[rS(t)+Y(t)-C(t)-\dot S(t)\right]\right\}\mathrm{d}t,\\&=\int_0^T\left\{\underbrace{U[C(t)]+\lambda(t)\left[rS(t)+Y(t)-C(t)\right]}_{\text{即期 Hamilton 函数，简记为}\mathcal{H}(t)}-\lambda(t)\dot S(t)\right\}\mathrm{d}t,\\&=\int_0^T\left\{\mathcal{H}[t,S(t),C(t),\lambda(t)]-\lambda(t)\dot S(t)\right\}\mathrm{d}t,\\&\quad\frac{\partial\mathcal{L}(t)}{\partial\lambda(t)}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial\lambda(t)}-\dot S(t)=0\\&=\int_0^T\mathcal{H}[t,S(t),C(t),\lambda(t)]\mathrm{d}t-\int_0^T\underbrace{\lambda(t)\dot S(t)}_{\text{分部积分}}\mathrm{d}t,\\&=\int_0^T\mathcal{H}[t,S(t),C(t),\lambda(t)]\mathrm{d}t-\left\{\overbrace{[\lambda(t)S(t)]|_0^T-\int_0^T\dot\lambda(t)S(t)\mathrm{d}t}^{ab'=(ab)'-a'b}\right\},\\&=\int_0^T\mathcal{H}[t,S(t),C(t),\lambda(t)]+\dot\lambda(t)S(t)\mathrm{d}t-[\lambda(t)S(t)]|_0^T,\\&=\int_0^T\mathcal{H}[t,S(t),C(t),\lambda(t)]+\dot\lambda(t)S(t)\mathrm{d}t-[\lambda(T)S(T)-\lambda(0)S(0)],\\&=\int_0^T\mathcal{H}[t,S(t),C(t),\lambda(t)]+\dot\lambda(t)S(t)\mathrm{d}t-(0-0).\\&\quad\frac{\partial\mathcal{L}(t)}{\partial S(t)}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial S(t)}+\dot\lambda(t)=0\end{aligned}$$

其中 Lagrange 乘子此时也被称为 Hamilton 函数的共态变量或协变量。一阶必要条件为：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}(t)}{\partial C(t)}&=0,\\\frac{\partial\mathcal{L}(t)}{\partial S(t)}&=0,\\\frac{\partial\mathcal{L}(t)}{\partial\lambda(t)}&=0.\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial C(t)}&=0,\\\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial S(t)}&=-\dot\lambda(t),\\\frac{\partial\mathcal{H}(t)}{\partial\lambda(t)}&=\dot S(t).\end{aligned}\right.$$

图 11：从 Lagrange 函数到 Hamilton 函数一阶条件的推导。截自笔者书稿。

(3.4) **内容细化上的创新**：不放过有意义的细节

很多书上会像论文上一样省略一些必要的有意义的细节，**对本科生的教学，应突出强调细节的处理**。故事当然也要讲，但好故事逻辑性应该强，而强逻辑也即故事的内部机制。一旦细节不清，模棱两可，故事也就似是而非。

比如，具有不等式约束的最优化问题，经济学中通常直接用 Lagrange 函数方法求解，但其实隐含了不等式约束转换成等式约束的条件，学生应该了解。

再比如，因变量和自变量都取对数再求导即表示弹性，为什么会有这种处理技巧，为何又有同期替代弹性与跨期替代弹性这样的概念，学生应该知道。

还有一些细节更值得指出， 比如 CD 函数是由 CES（常替代弹性）函数简化而来，简化过程中有对哪个参数作出怎样的约束；或者有时会跳过 CIES（常跨期替代弹性）函数而假设一个对数函数，这又意味着锁定哪个参数的值，对经济机制的分析有何约束，学生应当明晰。

1.2 动态最优问题

II. 无穷期

例 13-2. 禀赋经济体的无穷期消费决策

沿用下标 t 来表示无穷期动态最优化问题也更方便，$t = 1 \to T \to \infty$ 从而有 $t = 1 \to \infty$ 表示有限期转至无穷期：

$$\left.\begin{aligned} &\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}} U_1 \equiv \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t), \\ &\text{s.t.} \quad \left\{\begin{aligned} C_t + S_t &\le (1+r)S_{t-1} + Y_t, \\ 0 &\le C_t. \end{aligned}\right\} t = 1, 2, \ldots, \infty. \\ &\qquad \text{给定 } S_0 = 0 = \lim_{t\to\infty} S_t. \end{aligned}\right\} \xrightarrow[C_t<\infty]{C_t>0} \left\{\begin{aligned} &\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}} U_1 \equiv \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t), \\ &\text{s.t.} \quad C_t + S_t = (1+r)S_{t-1} + Y_t, \\ &\qquad\quad t = 1, 2, \ldots, \infty. \\ &\qquad \text{给定 } S_0 = 0 = \lim_{t\to\infty} S_t. \end{aligned}\right.$$

其中，$0 < C_t < \infty$ 源自前述 Inada 条件。

图 12：不等式约束最优化直接用 Lagrange 方法的条件。截自笔者书稿。

3.1 静态均衡的位移分析

例 4. 需求弹性和供给弹性

给定变量 y 是时间 t 的函数，即 $y = y(t)$，则有增长率的表达式为：

$$g_y \equiv \frac{\mathrm{d}\log y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\log y(t)}{\mathrm{d}y(t)} \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{y(t)} \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t}{y(t)} = \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{y} = \frac{\text{边际函数}}{\text{总函数}}.$$

可类比地，设有 $y = f(x)$，y 对 x 的弹性被定义为 x 产生 1 单位的变动率引起的 y 的变动率的幅度（用其绝对值来度量某一特定点 $x = x_0$ 处是否有弹性），即 $(\Delta y/y)/(\Delta x/x)$，用微分近似后又被称为点弹性，即 $(\mathrm{d}y/y)/(\mathrm{d}x/x)$，但又可表示为对 $\log y$ 取 $\log x$ 的导数，因为：

$$\epsilon_{yx} \equiv \left|\frac{\mathrm{d}\log y}{\mathrm{d}\log x}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\log y}{\mathrm{d}y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\log x}{\mathrm{d}x}}\right| = \left|\frac{1}{y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \frac{1}{\frac{1}{x}}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}y/y}{\mathrm{d}x/x}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}x}{y/x}\right| = \left|\frac{\text{边际函数}}{\text{平均函数}}\right| \gtreqless 1 \left\{\begin{matrix} \text{富有弹性} \\ \text{单位弹性} \\ \text{缺乏弹性} \end{matrix}\right\} \text{不变弹性}.$$

图 13：增长率和弹性的对数定义与其原始定义之间的关联。截自笔者书稿。

ii) 合意投入要素间的替代弹性

同于效用函数的形式设定，令生产函数为：

$$Q_s = A\left[\alpha K_d^{\Lambda} + (1-\alpha)L_d^{\Lambda}\right]^{\frac{1}{\Lambda}} \overset{\text{或}}{=} A\left[\alpha K_d^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} + (1-\alpha)L_d^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}\right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}.$$

稍作移项后两边取对数：

$$\log\frac{Q_s}{A} = \frac{\log\left[\alpha K_d^{\Lambda} + (1-\alpha)L_d^{\Lambda}\right]}{\Lambda} \overset{\text{或}}{=} \frac{\log\left[\alpha K_d^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} + (1-\alpha)L_d^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}\right]}{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}.$$

当 $\Lambda \to 0$ 或 $\epsilon \to 1$ 时，上述两式右侧分子分母都逼近于 0，用 L'Hôpital 法则可求极限：

$$\begin{aligned}
\lim_{\Lambda\to 0}\log\frac{Q_s}{A} &= \lim_{\Lambda\to 0}\frac{\mathrm{d}\{\log\left[\alpha K_d^{\Lambda} + (1-\alpha)L_d^{\Lambda}\right]\}/\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}\Lambda/\mathrm{d}\Lambda},\\
&= \lim_{\Lambda\to 0}\frac{\alpha K_d^{\Lambda}\log K_d + (1-\alpha)L_d^{\Lambda}\log L_d}{\alpha K_d^{\Lambda} + (1-\alpha)L_d^{\Lambda}},\\
&= \frac{\alpha\log K_d + (1-\alpha)\log L_d}{\alpha + (1-\alpha)},\\
&= \log\left(K_d^{\alpha}L_d^{1-\alpha}\right).\\
\Rightarrow \quad \lim_{\Lambda\to 0} Q_s &= AK_d^{\alpha}L_d^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

上述条件下，CES 形式的生产函数有所变形，退化为 Cobb-Douglas (CD) 形式。

图 14：CD 函数的由来及参数的约束条件。截自笔者书稿。

前面有同期替代弹性 $\epsilon \to 1$ 时，CES 函数退化为 CD 函数；此处当跨期替代弹性 $\sigma \to 1$ 时，CIES 函数退化为对数函数，因为：

$$\begin{aligned}
U(C) &= \frac{C^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}},\\
\Rightarrow \quad \lim_{\sigma\to 1} U(C) &= \lim_{\sigma\to 1}\frac{C^{1-\frac{1}{\sigma}}-1}{1-\frac{1}{\sigma}},\\
\xRightarrow{\text{l'Hôpital 法则}} \quad &= \lim_{\sigma\to 1}\frac{\frac{1}{\sigma^2}C^{1-\frac{1}{\sigma}}\log C}{\frac{1}{\sigma^2}},\\
&= \log C.
\end{aligned}$$

图 15：对数效用函数的由来及参数限制条件。截自笔者书稿。

(3.5) 内容组合上的创新：经典搭配前沿

教科书的知识一般相对过时，适当穿插介绍前沿论文上对相关经典知识的拓展或应用，有助“死水活起来”。比如，凯恩斯的选美模型很经典，但其中关于个人信息与公共信息各自价值及相互作用的探讨在今天仍然有用，有学者尝试拓展的方向是将个人信息进一步异质化为专家和公众，然后在此框架中研究专家预期与公众预期间的相互作用力，这对宏观政策有重要意义。

还比如教科书上会介绍经典的七方程古典模型和六方程凯恩斯模型，这组模型与当前仍然流行的 RBC、DNK 等理论模型一脉相承，可稍微提及供学生了解。

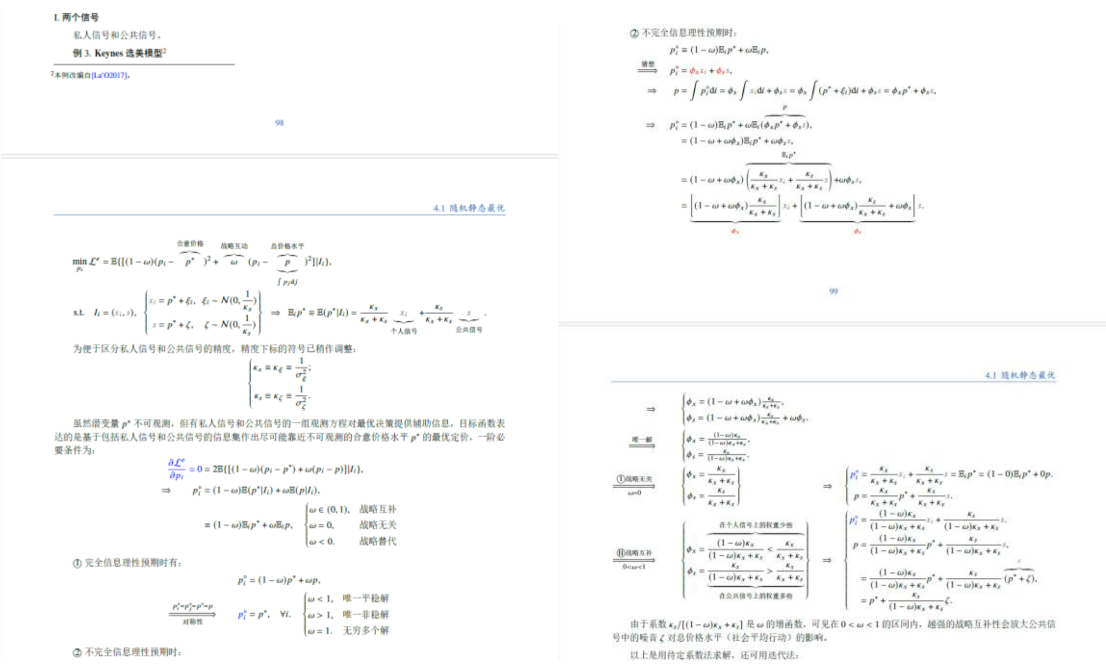


图 16：Keynes 经典选美模型的重生。截自笔者书稿。

4.教学方法创新

笔者窃以为，本门课程而言，尤须将古典和现代的教学方法融为一体。

首先，回归教学的经典方式——板书——就是最好的授课方式创新。

(4.1) **不带参考书、不用 PPT、甚至无需一页提示的纸**，根据筹备好、规划好、理解好的知识链条全程板书（只就本类课程而言）。板书有助教师集中精力，带动学生跟上层层铺开和依次递进的思路，随时提问，增加互动。

(4.2) 虽未带一些有形的资料，但结合现代技术，可通过**建立个人教学主页充实教学资料库**（比如可放置教师全球视野下的各种参考资料及录课视频等）。

(4.3) 综合多种资料，备课时**自编讲义，做足台下工作**。

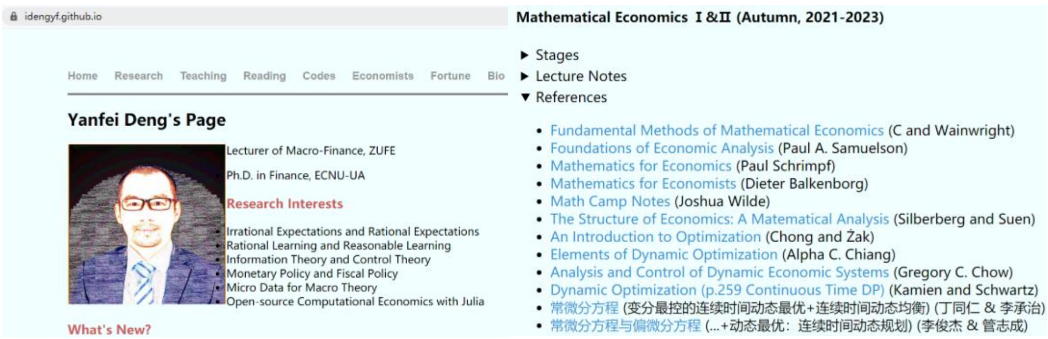
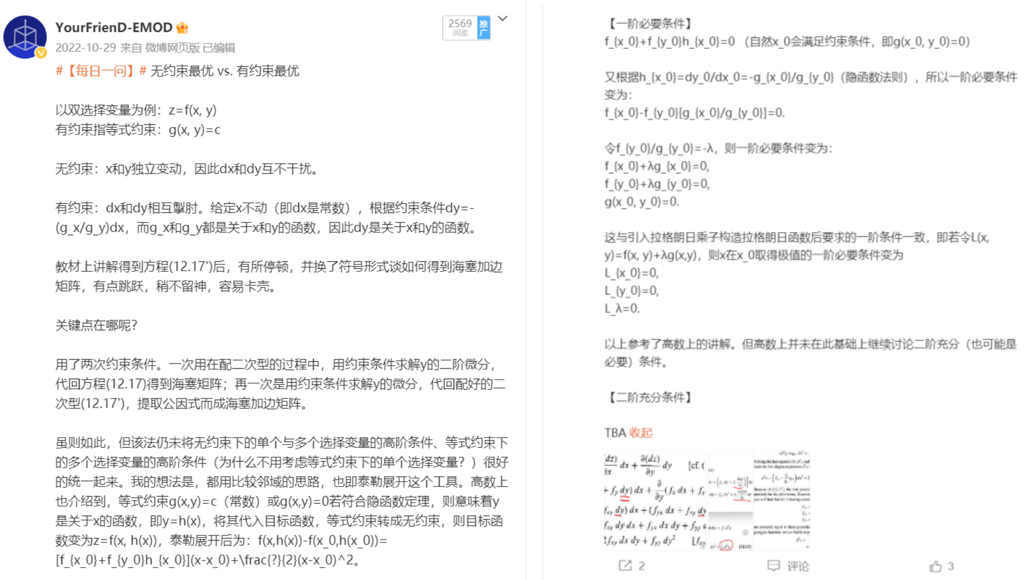


图 17：个人学术主页及个人教学主页的部分页面，完整版可参看 https://idengyf.github.io/teaching/

(4.4) 相关主题采用**统一方法讲解**。比如，单变量、多变量、等式约束、不等式约束最优化问题的一阶、二阶甚至更高阶条件都用 Taylor 展开后的邻域思想介绍，这有助**一懂百懂，一通百通**。很多教材上对这部分内容的介绍相对凌乱，之所以笔者萌生方法上“大一统”的思想，也是上学期在课上参照教材讲授时学生听得云里雾里，学生对疑惑之处提问后笔者竟一时也答不上来。后来笔者思虑摸索后，建立了此“统一”的方法。此法还有其他好处，比如 Hessian 矩阵或 Hessian 加边矩阵关于极值的判定条件及其由来，皆可通过此法一并很好呈现。


YourFrienD-EMOD
2022-10-29 来自 微博网页版 已编辑
2569 阅读
#【每日一问】# 无约束最优 vs. 有约束最优

以双选择变量为例：z=f(x, y)
有约束指等式约束：g(x, y)=c

无约束：x和y独立变动，因此dx和dy互不干扰。

有约束：dx和dy相互掣肘。给定x不动（即dx是常数），根据约束条件dy=-(g_x/g_y)dx，而g_x和g_y都是关于x和y的函数，因此dy是关于x和y的函数。

教材上讲解得到方程(12.17')后，有所停顿，并换了符号形式谈如何得到海塞加边矩阵，有点跳跃，稍不留神，容易卡壳。

关键点在哪呢?

用了两次约束条件。一次用在配二次型的过程中，用约束条件求解y的二阶微分，代回方程(12.17)得到海塞矩阵；再一次是用约束条件求解y的微分，代回配好的二次型(12.17')，提取公因式而成海塞加边矩阵。

虽则如此，但该法仍未将无约束下的单个与多个选择变量的高阶条件、等式约束下的多个选择变量的高阶条件（为什么不用考虑等式约束下的单个选择变量？）很好的统一起来。我的想法是，都用比较邻域的思路，也即泰勒展开这个工具。高数上也介绍到，等式约束g(x,y)=c（常数）或g(x,y)=0若符合隐函数定理，则意味着y是关于x的函数，即y=h(x)，将其代入目标函数，等式约束转成无约束，则目标函数变为z=f(x, h(x))，泰勒展开后为：f(x,h(x))-f(x_0,h(x_0))=[f_{x_0}+f_{y_0}h_{x_0}](x-x_0)+\frac{?}{2}(x-x_0)^2。

【一阶必要条件】
f_{x_0}+f_{y_0}h_{x_0}=0 （自然x_0会满足约束条件，即g(x_0, y_0)=0）

又根据h_{x_0}=dy_0/dx_0=-g_{x_0}/g_{y_0}（隐函数法则），所以一阶必要条件变为:
f_{x_0}-f_{y_0}[g_{x_0}/g_{y_0}]=0.

令f_{y_0}/g_{y_0}=-λ，则一阶必要条件变为:
f_{x_0}+λg_{x_0}=0,
f_{y_0}+λg_{y_0}=0,
g(x_0, y_0)=0.

这与引入拉格朗日乘子构造拉格朗日函数后要求的一阶条件一致，即若令L(x, y)=f(x, y)+λg(x,y)，则x在x_0取得极值的一阶必要条件变为
L_{x_0}=0,
L_{y_0}=0,
L_λ=0.

以上参考了高数上的讲解。但高数上并未在此基础上继续讨论二阶充分（也可能是必要）条件。

【二阶充分条件】

TBA 收起

2 评论 3

图 18：关于用“统一”方法介绍静态最优化问题的初步思考。截自笔者学术微博。


YourFrienD-EMOD
2022-11-13 来自 HUAWEI Mate 20 已编辑
5798 阅读
无约束与等式约束最优化的统一。截图2源自本人正偶尔抽空新编的#《数理经济学》#。
长图
1 评论 13

图 19：经半个月的摸索，找到了“统一”方法。截自笔者学术微博。

图 20：“统一”方法用于讨论多种静态最优化问题的各阶条件。截自笔者书稿。

5. 教学活动创新

(5.1) 目前所用教材是翻译版，笔者鼓励学生找到翻译错误，以此方式促使学生课前预习或课后复习时更认真。此外，所用教材虽很经典，但个别表达可能有所偏颇或值得推敲，鼓励学生提出疑惑之处，并与学生一同探讨求解。

(5.2) 非上课时间，笔者也时常思考课上讲过的内容，有时会从中提炼一些问题，编辑成一个栏目叫《每日一问》，发在个人学术微博，并分享在班级群，鼓励学生平日对发布的问题进行思考，这既是笔者自身在理清思路，也是想启发学生的思考，培养其学习的兴趣，并希望通过《每日一问》的方式保持本课程每周只上一次的新鲜感和连续性。

图 21：个人微博上的栏目《每日一问》

(5.3) 笔者还通过个人微博整理每周教学的重点、难点，或理清相关知识点的脉络，帮助学生复习，并希冀带动学生预习。

YourFrienD-EMOD
2022-9-29 来自 微博网页版 已编辑
1265 阅读
#《数理经济学》# （基础课）小结 & 预习

案例：

市场模型
Q^s=Q^d,
Q^d=a+bP, a, b>0,
Q^s=-c+dp, c, d>0.

国民收入模型
Y=C+I+G, I=I_0, G=G_0,
C=a+bY, a>0, 0<b<1.

上述市场模型显然是局部均衡的，问题，该国民收入模型是局部均衡还是一般均衡的?

蒋先生的教材上对矩阵代数的介绍主要为求解静态均衡，就此目标而言，假设静态均衡存在且唯一，那么矩阵可逆或矩阵非奇异是关键所在（方阵+满秩或行列式不为0），也因此应用克莱姆法则的隐含前提也是静态均衡被假设存在。在最优化和动态分析等方面也有矩阵代数的用武之地。

1）经济系统由简化形式方程及结构方程（方程右边存在内生变量，即两个或两个以上的自变量之间并非独立）构成，均衡解为显性的简化形式方程，易进行比较静态分析。

2）经济系统由简化形式方程及结构方程构成，当均衡解难以表达为显性的简化形式方程，则要做比较静态分析稍微麻烦。 收起

评论 4

YourFrienD-EMOD
2022-10-27 来自 微博网页版
2140 阅读 推广
#《数理经济学》# （基础课）小结 & 预习

上周，讲的仍是无约束目标函数的最优化问题，从单个选择变量到多个选择变量上。

单个变量也好，多个变量也罢，判断极值的简单方法仍是微积分思想。判断的依据简单明了。但在解释上，多个变量时变得稍显复杂，除了单个变量时驻点可能是极值点与拐点外，还可能是鞍点（一个切面上是极大值而另一个切面上是极小值）。

所用数理经济学的教材上对充分条件的介绍稍显简单，我备课时也未留意到，上课时只根据书上的论证一笔带过，还是学生们指出了问题，并提醒我在此方面的介绍存在模糊之处。专门的数学书籍对此问题有严格论证，但我淡忘了。

这让我想起之前有外校老师得知我们这给本科生安排高宏选修课时表现出的惊诧。从学生们敏锐地发现问题和提出问题的情况来看，我们的本科生完全有能力选修高宏课程。既如此，自然，最后学生们能否从高宏的学习中有所收获，很大程度上取决于教师是否对高宏的知识体系真正了然于心、烂熟于胸。

从过去两年我给本科生上高宏的情况来看，我并不确定学生们到底学到了多少，或许他们掌握得仍是皮毛。果真如此的话，根本原因还在于我这个教师的水平仍有待提高，这毋庸置疑。怎么来判断学生学到的并非皮毛而有高质量的收获呢？我提出过一个参考标准，那就是当学生们继续深造时，无论去国内外哪所高校听什么级别的教师介绍同类知识时，都不会觉得陌生茫然和手足无措，能很快地融入，快速地衔接。这个标准是站在学生的角度来看的，也只有学生到了那样的环境之后，才能给出在他们之前的学习中是否有所收获或有多少收获的答案。

回到上述多个变量极值问题的充分条件上。既然单个选择变量时可用泰勒展开（邻域）帮助理解拐点并确立极值点的充分条件，课后我想到此法同样可帮助理解多个选择变量时的鞍点（和拐点）并确立极值点的充分条件。

具有等式约束的目标函数的极值问题，二阶充分条件的判断工具，由原来的海塞矩阵变成了海塞加边矩阵，加边的由来正是等式约束，但为什么增加等式约束后就需加边，这是本周要介绍的重点。当然，再次强调，此结论仅是经济分析的一个工具。 收起

转发 评论 7

图 22：个人微博上的栏目，本课程的小结&预习

6. 教学评价创新

对学生考评的创新主要体现在期末考试的题目上，一般分三个题型：简答、简算和论述。创新之处集中体现在简答和论述题上，简答题**强调对多个同类知识点的理解和掌握的通透**上，论述题需对理论模型熟练，回答时需要用到方程和函数但问卷中不会给出，需要**学生答题时自行建构**。以本次期末考试为例，

a.简答题为：

①系数与乘数的联系与区别是?
②存在唯一静态均衡与隐函数定理成立有一个共同的条件，其为？为何有此共同条件?
③比较静态分析的前提条件是？假设存在一个初始均衡，它在比较静态分析的前提条件中扮演何种角色?
④为何会用到高阶条件去判断驻点或拐点?
⑤静态最优化的类型图谱是？便于识别最优化各阶条件的统一方法是？为何有此统一方法?

⑥海塞矩阵与海赛加边矩阵的应用对象及其结论有何不同，为何有此不同?

b.论述题为：

自构模型，试分析和比较以产出供给量为选择变量和以投入要素为选择变量的完全竞争市场环境下的厂商最优化行为，及不同厂商的产品之间存在不完全可替代性及同一厂商的两种产品之间存在不完全可替代性的垄断竞争市场环境下的厂商最优化行为。

除了考试题目上的创新外，平时课上鼓励学生上台在黑板上做题。前面提到让学生找到翻译教材中的错误之处，包括书中看来迷惑不解之处，等等，对于积极参与课堂活动者，给以更好的平时成绩。

7. 思政融入创新

主要是爱国思想融入上的创新。

(7.1) 西方在关键技术上卡脖子，师夷长技以实现中华民族的伟大复兴。

(7.2) 助力宏观政策实施更科学，推动经济高质量发展和人民共同富裕。

四、实施过程

为更好践行教学上或课堂内外的创新想法，笔者建立了个人教学主页并逐步完善教学资料，配套录课计划于明年落实。个人微博时常更新关于教学中相关知识点的思考或整理、归纳、提炼。与本课程配套的专著计划于 2024 年正式出版。

(4.1) 教学主页搭建完成，正充实教学资料库：https://idengyf.github.io/teaching/

(4.2) 学术微博经常设置课堂上的相关议题：https://weibo.com/dengyfman0616

(4.3) 教学专著正抓紧完稿：

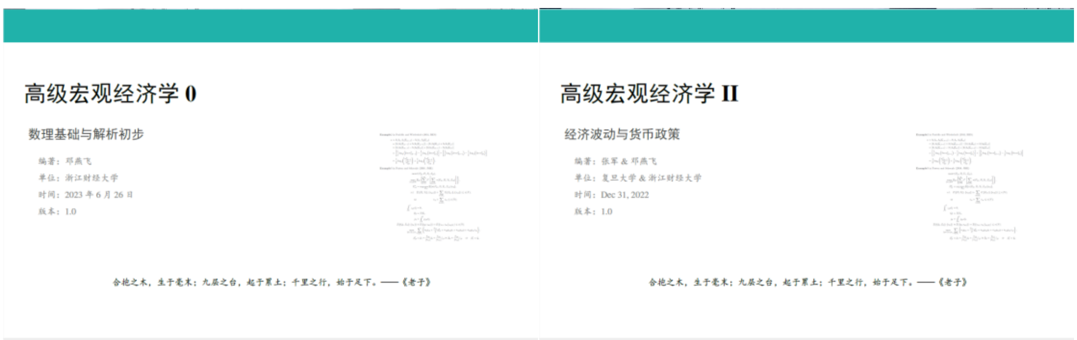


图 23：个人正抓紧完稿与本课程有关的两本学术专著

五、初步成效

以下截图会涉及到部分私人信息，本应屏蔽，考虑到资料的真实性等问题，特完整呈现，仅供内部交流。

(5.1) 本院本科生积极选课。本院博士生一度联名指定笔者为其上相关课程。

(5.2) **本校学生能选愿选**，不能选也有旁听者。我校浙研院优秀博士生沈睿诚等同学积极旁听我的高宏课（高宏 0 便是数理经济学）。

(5.3) **本市学生前来旁听**。

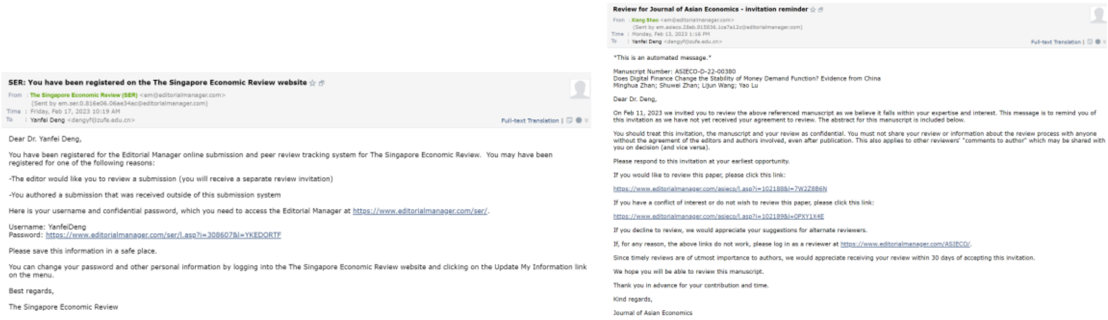
图 24：浙大旁听博士生上课后的部分反馈

(5.4) **全国各地学生关注**。笔者将专著《数理经济学》命名为《高级宏观经济学 0：数理基础与解析初步》，颇有新意的内容会及时在个人微博上分享，受到全国爱好学习的师生关注。由于不想受到更多干扰，专心教研，笔者关闭了自媒体的评论功能，偶尔才允许私信，但总能收到相关询问信息，仅截图几例供参考。

图 25：全国各地的学生微信微博上的留言反馈

(5.5) **受到全球同行留意。**

个人 Github 学术主页开通后，多个国内外学术期刊来信邀请审稿。他们或多或少地也会关注到在此主页上的《数理经济学》等教学内容。列举两例如下：



SER: You have been registered on the The Singapore Economic Review website

From : The Singapore Economic Review (SER) <em@editorialmanager.com>
(Sent by em.ser.0.816e06.06ae34ac@editorialmanager.com)
Time : Friday, Feb 17, 2023 10:19 AM
To : Yanfei Deng <dengyf@zufe.edu.cn>

Full-text Translation |

Dear Dr. Yanfei Deng,

You have been registered for the Editorial Manager online submission and peer review tracking system for The Singapore Economic Review. You may have been registered for one of the following reasons:

-The editor would like you to review a submission (you will receive a separate review invitation)

-You authored a submission that was received outside of this submission system

Here is your username and confidential password, which you need to access the Editorial Manager at https://www.editorialmanager.com/ser/.

Username: YanfeiDeng
Password: https://www.editorialmanager.com/ser/l.asp?i=308607&l=YKEDORTF

Please save this information in a safe place.

You can change your password and other personal information by logging into the The Singapore Economic Review website and clicking on the Update My Information link on the menu.

Best regards,

The Singapore Economic Review

Review for Journal of Asian Economics - invitation reminder

From : Xiang Shao <em@editorialmanager.com>
(Sent by em.asieco.28eb.015036.1ca7a12c@editorialmanager.com)
Time : Monday, Feb 13, 2023 1:16 PM
To : Yanfei Deng <dengyf@zufe.edu.cn>

Full-text Translation |

This is an automated message.

Manuscript Number: ASIECO-D-22-00380
Does Digital Finance Change the Stability of Money Demand Function? Evidence from China
Minghua Zhan; Shuwei Zhan; Lijun Wang; Yao Lu

Dear Dr. Deng,

On Feb 11, 2023 we invited you to review the above referenced manuscript as we believe it falls within your expertise and interest. This message is to remind you of this invitation as we have not yet received your agreement to review. The abstract for this manuscript is included below.

You should treat this invitation, the manuscript and your review as confidential. You must not share your review or information about the review process with anyone without the agreement of the editors and authors involved, even after publication. This also applies to other reviewers' "comments to author" which may be shared with you on decision (and vice versa).

Please respond to this invitation at your earliest opportunity.

If you would like to review this paper, please click this link:

https://www.editorialmanager.com/asieco/l.asp?i=102188&l=7W2Z8B6N

If you have a conflict of interest or do not wish to review this paper, please click this link:

https://www.editorialmanager.com/asieco/l.asp?i=102189&l=0PXY1X4E

If you decline to review, we would appreciate your suggestions for alternate reviewers.

If, for any reason, the above links do not work, please log in as a reviewer at https://www.editorialmanager.com/ASIECO/.

Since timely reviews are of utmost importance to authors, we would appreciate receiving your review within 30 days of accepting this invitation.

We hope you will be able to review this manuscript.

Thank you in advance for your contribution and time.

Kind regards,

Journal of Asian Economics

图 26：期刊来信邀请审稿

(5.6) **得到著名学者鼓励。**《数理经济学》讲义始于我在复旦大学从事博士后工作期间，彼时我将初稿发给新凯恩斯理论学派的标志性人物 Carl Wlash 指导，他给我以一定程度的肯定和鼓励，并分享给我其名著“Monetary Theory and Policy”一书的参考答案。要读懂该书，《数理经济学》是基本要求。

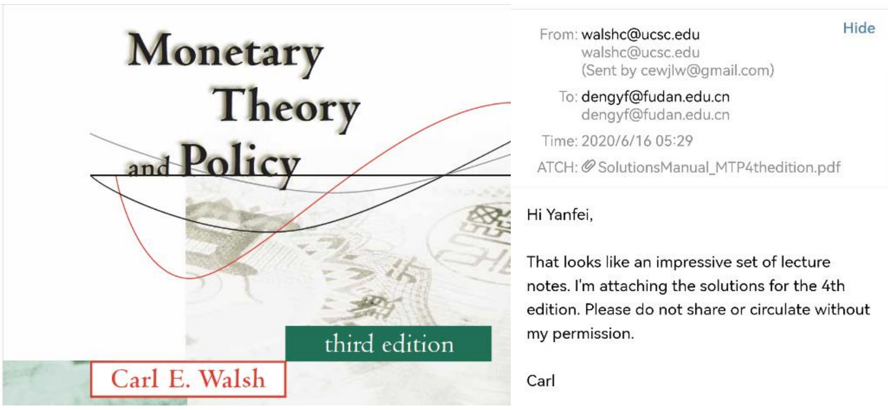


图 27：与著名经济学家 Carl Walsh 的通信

报告完毕，请专家批评指正。

二〇二三年十二月二十七日晚，于杭州钱塘江畔