



# 目录

<b>第一章 静态最优问题 vs. 动态最优问题</b>	<b>6</b>
1.1 静态最优问题	6
1.1.1 无约束最优化	6
1.1.1.1 单个决策变量	6
1.1.1.2 多个决策变量	13
1.1.2 有约束最优化	19
1.1.2.1 决策变量之间的等式约束	19
1.1.2.2 决策变量之间的不等式约束	32
1.2 动态最优问题	41
1.2.1 离散时间	42
1.2.1.1 完美预期下的两期决策	42
1.2.1.2 完美预期下的多期决策	46
1.2.2 连续时间	53
1.2.2.1 状态变量之间的无约束	53
1.2.2.2 状态变量之间的等式约束	63
<b>第二章 均衡静态确定 vs. 均衡动态确定</b>	<b>66</b>
2.1 静态同期均衡分析	66
2.1.1 静态均衡的存在性和唯一性	66
2.1.1.1 静态非目标均衡	66
2.1.1.2 静态目标均衡	72
2.1.2 静态均衡的偏离及其稳定性	72
2.2 动态跨期均衡分析	77
2.2.1 连续时间系统的均衡动态、稳态及其稳定性	79
2.2.1.1 微分方程描述的连续时间经济系统的均衡动态	79
2.2.1.2 微分方程连续时间经济系统的稳态及其稳定性	83
2.2.2 离散时间系统的均衡动态、稳态及其稳定性	90
2.2.2.1 差分方程描述的离散时间经济系统的均衡动态	90
2.2.2.2 差分方程离散时间经济系统的稳态及其稳定性	97
<b>第三章 比较静态分析 vs. 比较动态分析</b>	<b>109</b>
3.1 静态均衡的比较分析	109
3.1.1 非目标均衡位移与比较静态分析	109
3.1.1.1 简型方程经济系统中新旧非目标均衡的比较	109
3.1.1.2 结构方程经济系统中新旧非目标均衡的比较	110
3.1.2 目标均衡位移与比较静态分析	116
3.1.2.1 简型方程经济系统中新旧目标均衡的比较	116
3.1.2.2 结构方程经济系统中新旧目标均衡的比较	121
3.2 跨期均衡的比较分析	134
3.2.1 非目标稳态位移与比较稳态分析	134
3.2.1.1 简型方程经济系统中新旧非目标稳态的比较	135
3.2.2 目标稳态位移与比较稳态分析	135
3.2.2.1 简型方程经济系统中新旧目标稳态稳态的比较	135
3.3 均衡动态的比较分析	136
3.4 随机均衡的比较分析	137

<b>第四章 随机均衡静态 vs. 随机均衡动态</b>	<b>138</b>
4.1 静态随机均衡分析	138
4.1.1 静态随机均衡的存在性和唯一性	138
4.1.1.1 完全信息随机均衡静态	138
4.1.1.2 不完全信息随机均衡静态	140
4.1.2 静态随机均衡的偏离及其稳定性	158
4.1.2.1 非目标随机静态均衡的收敛	158
4.1.2.2 目标随机静态均衡的收敛	159
4.2 动态随机均衡分析	159
4.2.1 动态随机均衡的存在性与唯一性	159
4.2.1.1 完全信息理性预期下的均衡动态	159
4.2.1.2 不完全信息理性预期下的跨期均衡动态	171
4.2.2 动态随机均衡的偏离及其稳定性	203
4.2.2.1 完全信息动态经济系统非随机稳态的收敛	203
4.2.2.2 不完全信息动态经济系统非随机稳态的收敛	203
<b>第五章 随机静态最优 vs. 随机动态最优</b>	<b>205</b>
5.1 随机静态最优	205
5.1.1 完全信息静态最优	205
5.1.1.1 单个随机变量	205
5.1.1.2 多个随机变量	207
5.1.2 外生信息结构的不完全信息静态最优	210
5.1.2.1 单个信号	210
5.1.2.2 多个信号	211
5.1.3 内生信息结构的不完全信息静态最优	227
5.1.3.1 单个信号	228
5.1.3.2 多个信号	230
5.2 随机动态最优	232
5.2.1 离散时间	232
5.2.1.1 完全信息理性预期下的跨期决策	232
5.2.1.2 不完全信息理性预期下的跨期决策	236
5.2.2 连续时间	237
5.2.2.1 完全信息理性预期下的跨期决策	237
5.2.2.2 不完全信息理性预期下的跨期决策	238

# 作者致谢

## 作者简介

张 军

经济学博士，

邓燕飞（主笔）

经济学博士，

沈 吉

经济学博士，

邬介然

经济学博士，

## 丛书体系

考虑到高级宏观经济学是相对复杂的一套知识体系，近些年笔者在教学科研的探索中，逐步萌发编写高级宏观经济学系列教材的设想。

高级宏观经济学 0：数理基础与解析初步。主要介绍现代宏观经济学中经典模型构造与分析时常用的数理知识与演绎方法。由于现代宏观建立在微观基础之上，因而宏观就包含了微观。

高级宏观经济学 I：经济波动与货币政策。

高级宏观经济学 II：经济增长与内外驱动。

高级宏观经济学 III：实证方法与计量检验。

## 致谢

### 项目资助

浙江财经大学文华学院交叉融合项目资助

浙江财经大学重点教材建设项目资助

### 过程帮助

# 数心雕龙

## 引言

[7] 介绍道，数学在经济学中有长期而全面的应用，因此经济学中任何一个学科专业广义上都可称之为“数理经济学”。但狭义上，它与“计量经济学”和“文字经济学”又有明显不同：“计量经济学”着眼统计归纳，“数理经济学”立足逻辑演绎；“文字经济学”全用文字表述，“数理经济学”多用数学表达。

其中，“文字经济学”和“数理经济学”的交锋最多，不乏热烈讨论甚至激烈争论，但文字符号和数学符号都只是经济学中的描述语言和分析工具，以要使用谁莫使用谁为主题的论战似无意义，文字语言与数学语言自由切换地描述、分析和解决经济学问题或可作为一个应尽力达成的目标。

值得一提的是，因文字语言容易想到“文心雕龙”：《序志》开篇云，“夫‘文心’者，言为文之用心也。”而“雕龙”典出《史记·孟子荀卿列传》中“雕龙奭”一说。刘勰用“雕龙”饰“文心”，指作文应似雕镂龙纹那般细微用心。笔者深以为然，故本书对数学语言的处理，也尽可能想象在雕龙而细致入微。

数理分析在当前的宏观经济学研究中处于基础性的重要地位，在学科发展史上也发挥了革命性的推动作用。[13] 总结了 1980-2018 年共 1984 篇发表在前五大和宏观领域前五大期刊上宏观经济学的研究文献，一个结论是，大部分的宏观研究都以理论为核心（样本年份中最后两年 70% 的文章都有理论模型，一点理论没有的文章极其稀少）。著名经济学者 Samuelson、Solow、Lucas 等一众经济学家无不具备深厚的数理功底，他们都具有非凡的概括和综合能力，总能把经济学中最为本质的规律和最重要的成果用最简洁的经济学模型和语言表达出，并整理成系统的理论框架。但正如 1906 年 Marshall 写给 Pauli 的信中所言，数学只是一种语言，其它什么都不是。本书希望在透彻梳理和细致探究数学这门语言在经济学中的发展和应用的基础上，尝试构建结合中国背景的宏观理论模型，以为建立新时代中国宏观经济知识体系贡献绵薄之力。

数理分析的不断深化也有助于学者和政策制定者理解日益复杂的现实宏观经济，从而制定更精细、更有效的宏观经济政策。中国新发展阶段国内外市场环境的不确定性陡增，供给侧和需求侧冲击叠加，转化成理论模型和数学语言就是多重冲击频现，信息摩擦突显，以往相对单调的宏观经济治理方法恐难以应对新发展阶段的诸多难题，健全宏观经济治理体系迫在眉睫，关键一环或是对经济主体预期的恰当管理以促使其行动与宏观政策目标一致。对此分析可建立科学的分析框架，这也是本书后三章（随机部分）三大主题的最终使命，即希望为不确定性环境下提出扭转预期偏弱推动新阶段我国经济继续高质量发展奠定理论基础，并将于压轴案例处讨论结合中国背景“基于理性疏忽引入适应性学习”的最优宏观政策。

## 前言

全书分为确定和随机两类理论模型，每类都是静态和动态两种，其中动态又有离散时间和连续时间之分，此为结构上的三个 2，简称 32。内容上又皆是三大主题：最优问题、均衡求解和比较分析，简称 3。故内容结构上谓之 323 式。

静态模型是静态最优求解、静态均衡确定和比较静态分析，动态模型相应地就是动态最优求解、动态均衡确定和比较动态分析。确定是随机的前身，静态是动态的特例，确定性静态模型的构建、求解和分析相对简单，但其对于动态理论模型中数理技术的掌握是很好的前导，故此将同一主题的静态和动态两种形式置于同一章。又由于确定和随机这两类模型的部分主题有重合，因此全书内容安排为确定模型的静动最优问题、确定模型的静动均衡求解、确定模型的静动比较分析、随机模型的静动比较分析、随机模型的静动均衡求解、随机模型的静动最优问题。恰好形成一个结构完整、少有重叠、各有侧重的闭环（思维导图 TBA）。

从著作的落脚点来看，笔者希望透彻阐明信息在宏观随机理论尤其是最优宏观政策分析中的应用和价值。随机宏观经济理论中之所以要用到信息，是因为理论模型会着眼于当下及未来的不确定性而构建，而最优货币政策是一种目标均衡分析，它将最优化、均衡确定和比较分析三种技术性语言融为一体。着实，确定性只是一种理

想状态，与现实偏离甚远，但确定亦是随机的特殊情形，确定模型中的解析技术是随机模型中解析技术的基石，为使读者熟练掌握随机模型的构建与解析，故全书有确定和随机两大板块之分，并且皆是最优化、均衡求解和比较分析这完全对应的三大主题。

### 第一章 静态最优问题 vs. 动态最优问题。

现代宏观理论建立在微观基础之上，最优化是得到诸如消费需求、劳动需求、资本需求、劳动供给、资本供给等行为方程的常用方法。动态最优更是理论宏观中难以回避的首要问题。华人学者蒋中一有专著《动态最优化基础》重点介绍变分法和最优控制，龚六堂和苗建军有著作《动态经济学方法》着重讨论最优控制和动态规划。事实上，动态最优的 Lagrange 方法也很好用，林致远的著作中有所介绍。关于 Lagrange 方法的由来，读者会发现这在同济版的高等数学中亦有阐述。问题是，这些方法有何关联？本章会从静态模型的 Lagrange 方法完美引入到动态模型，并会在连续时间中用 Lagrange 方法解释最优控制的由来，还会在离散时间中通过 Lagrange 方法引出动态规划方法。本章还建立了统一分析框架得到最优化的高阶条件，具有一定的创新。读者可能会困惑于能看懂部分教材仍无法看懂宏观理论文章，原因或许是这些著作未聚焦讨论一个核心问题，即宏观经济理论背景下如何确定“选择变量”？对于一个纯粹的数学问题，即便读者会用各种方法求解最优问题，一旦涉及宏观理论的具体建模，读者未必清楚哪个或哪些是应该作为“选择变量”。本章将用产品市场完全竞争、要素市场完全竞争、产品或要素市场垄断竞争为例，介绍不同理论背景下最优问题的恰当“选择变量”。尤其，将强调指出，比如完全竞争和垄断竞争，选择变量都有可能是产品数量，不同的是，在完全竞争理论中是供给量而在垄断竞争中是需求量。从逻辑结构上来看，第一章通过最优化得到行为方程后，加上定义方程和均衡条件，可得到完整的经济系统，这是第二、三章求解系统均衡及讨论外生变量或参数变动后“目标均衡”位移的前提。当然，早期宏观理论模型中的行为方程多为简单设定 (ad hoc)，比较分析的是“非目标均衡”，如此则可跳过最优求解。

### 第二章 均衡静态确定 vs. 均衡动态确定

静态均衡确定和动态均衡确定的内容相对简单，前者对于多维线性模型而言少不了借用矩阵求解（用矩阵求逆整体求解或用 Cramer 法则单个求解），后者对于离散时间和连续时间则分别求解差分方程（迭代法或滞后前瞻算法）和微分方程（积分法或待定系数法），这在很多著作中都能找到相似内容。本章结合经典宏观模型形成了两点特色：（1）根据局部均衡与一般均衡或根据不同理论模型识别不同的内生变量与外生变量，比如古典模型中单侧的劳动供给市场或劳动力需求市场，实际工资都是外生变量，而对于古典模型的总供给侧而言，实际工资则是内生变量，但在古典模型中名义工资是内生变量而在 Keynes 模型中根据劳动力市场未能自动出清的关键假设而令名义工资是外生变量；（2）前述聚焦的是均衡的存在性与唯一性，为使下一章的比较分析更严谨，应讨论均衡的稳定性，这又分定性的相位图分析和定量的数理解析，一维的相位路径简单，但二维就比较复杂了，比如分界线和流线的判断等，虽是定性描绘，仍要找到抓手，而定量的数理解析低维与高维、离散与连续，虽有差异，仍可尽可能保持解析框架的统一。

### 第三章 比较静态分析 vs. 比较动态分析

比较分析指的是外生变量或参数变动引起的均衡内生变量的变动情况。本章强调指出了简型方程和结构方程在比较分析技术上的差异，若理论模型有解析解，则其为简型方程，倘还连续可微，则微积分方法可快速得到比较分析的结果，而结构方程则要麻烦一些，一维或高维隐函数法则、全微分方法、全导数方法皆可用于比较分析。供需弹性、同期替代弹性、跨期替代弹性、替代效应、收入效应、财富效应、CD、CES 等经济学中重要的基础概念一并置于本章介绍，它们实质是另一个数量级上的比较分析，即常见的比较分析是自变量改变 1 个单位引起的因变量的变化，而这些概念多指自变量改变 1 个百分比引起的因变量百分之的变化。

与确定模型中的比较分析指外生变量或参数变动一单位引起的均衡内生变量的变动符号（同向还是反向）、变动幅度、变动的持续时间等不同的是，随机模型中的比较分析指是外生变量或参数波动一单位引起的均衡内生变量的变化情况。此外，随机模型中的比较分析与确定性模型中的比较分析并无特殊之处，当然，高度依赖于随机均衡确定或（及）随机最优求解。

### 第四章 随机均衡静态 vs. 随机均衡动态

随机均衡容易让读者想到动态随机一般均衡 (DSGE)，目前书上多见的是完全信息理性预期均衡理论，而不完全信息理性预期及有限理性预期更复杂或更贴合现实，自然仍是期刊文献中常出现的热点主题。静态随机均衡中也有完全信息与不完全信息之分。本章最大的特色是用著名的 Lucas 信号提取模型贯穿全章，包括含有外

生随机变量的完全信息静态 Lucas 模型、内生变量有不完美信息但外生变量是完美共同知识的静态 Lucas 模型、内生变量有不完美信息且外生变量是不完美共同知识的静态 Lucas 模型，以及内生变量有不完美信息但外生变量是完美共同知识的动态 Lucas 模型、内生变量有不完美信息且外生变量是不完美共同知识的动态 Lucas 模型（不可观测的内外生变量本身未以运动方程的形式出现仍是 Bayes 信号提取）、内生变量有不完美信息且外生变量是不完美共同知识的动态 Lucas 模型（不可观测的内外生变量本身未运动方程的形式出现须升级为 Kalman 滤波）、内生变量有不完美信息且外生变量是不完美共同知识的动态 Lucas 模型（新增不同运动形式的外生变量）。本章有多处细节处理，比如单个多个及单列多列信号的考察，先验均值为 0 不为 0 的讨论，从 Bayes 到 Kalman 无缝过渡的呈现。上述案例有个共同特征，即皆为外生信息结构，这可为下一章引出内生信息结构的系列问题奠定基础，此外，Lucas 模型作为新古典宏观经济理论的典范，在货币政策分析上也有重要的探讨价值，会通过均衡解体现。

## 第五章 随机静态最优 vs. 随机动态最优

如前所述，第一章可作为第二、三章的前提，亦可为本压轴章节深入浅出、细致完备地讨论外生信息和内生信息的随机理论模型作铺垫，而内、外生信息结构已经、正在、还将于宏观理论的理论文献和实际应用中发挥极为重要的作用。之所以让随机最优压轴，是因本专著的核心内容内生信息结构依赖于随机最优框架，是选择信息得到随机行为方程的关键一步，此后一般还须求解随机均衡并作随机比较，它可囊括最优问题、均衡求解和比较分析这三大主题，因此，最后一章既可实现对内生信息结构系列问题的完整介绍，又相当于是对全书前述章节内容的概括、归纳和总结；此外，内、外生信息结构及“基于理性疏忽引入适应性学习”的最优货币政策分析，也是在随机最优的框架下实现的，因此它还是一个压轴性的应用问题。本章所选案例将根据理论知识的逻辑递进关系依次介绍央行政策执行的“衰减原则” (Brainard, 1967; Blinder, 1998)，公共信息与私人信息的社会价值 [27]，外生信息与内生信息的最优货币政策 [31]，高维理性疏忽的求解 [1, 25] 及其最优货币政策分析 [49]，最后是结合中国背景“基于理性疏忽引入适应性学习”的宏观政策讨论 [47]。

## 符号列表

- 目标最优（广义最优，也是一种特殊的静态均衡）
- ◎ 合意最优（狭义最优，施加一些限定，比如非名义刚性时的最优决策）
- \*
- ⊗ 目标静态均衡（不完全信息下最优决策的博弈均衡）
- $( )_t^*$  或  $(t)^*$  非目标均衡动态
- $( )_t^\otimes$  或  $(t)^\otimes$  目标均衡动态
- 非目标跨期均衡（稳态）
- ⊙ 目标跨期均衡（稳态）